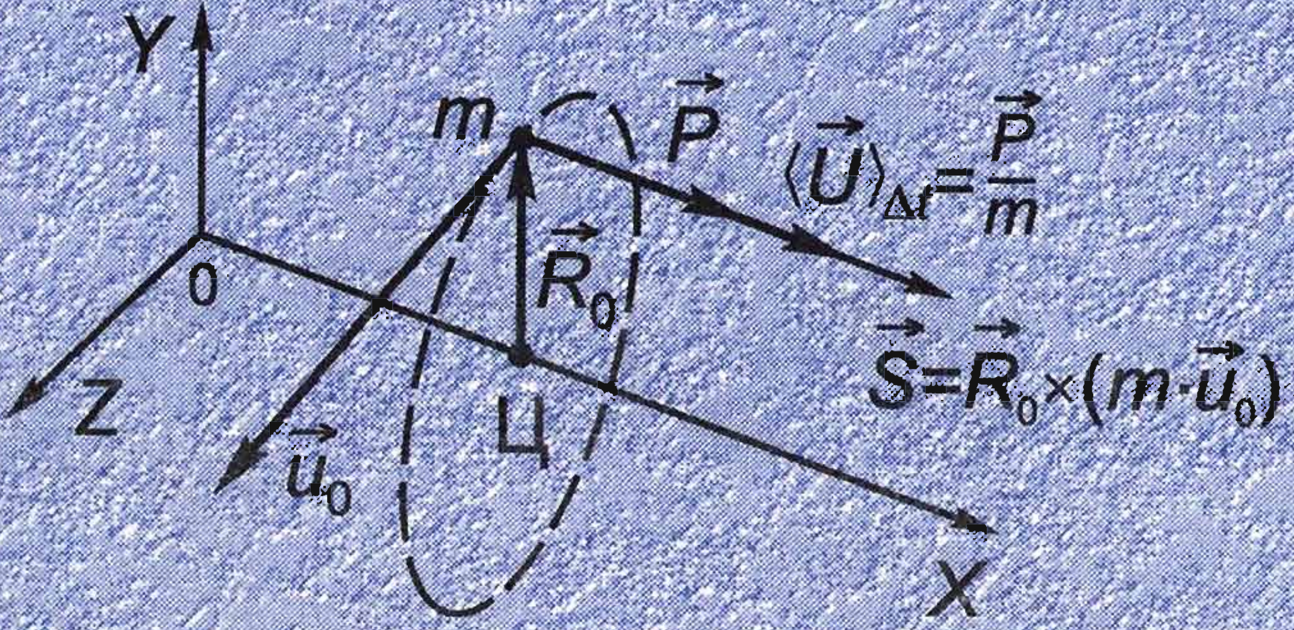
Ф. Ж. ВИЛЬФ



Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака

УРСС

Ф. Ж. ВИЛЬФ

Еще раз
о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака

Издание второе,
переработанное

Москва, 2002

УРСС

ББК 22.314
В 44
УДК 530.145

Вильф Фернандо Жозевич

В 44 **Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака.** Издание 2-е, перераб. М.: Едиториал УРСС, 2002. — 96 с.

ISBN 5-354-00037-8

В книге рассматривается новая — физически содержательная — интерпретация знаменитого соотношения Эйнштейна, связывающего полную энергию свободной точечной частицы с ее массой покоя и ее импульсом.

Доказывается, что спин (собственный механический момент) точечной частицы любой разновидности обусловлен ее вращением по орбите конечного радиуса с орбитальной скоростью, абсолютное значение которой в $\sqrt{3}$ раз превышает скорость света. Показано, что именно это следует из квантово-механического релятивистского уравнения Дирака; показано, что то же самое следует и из доквантового релятивистского соотношения Эйнштейна.

Доказывается, что уравнение Дирака (описывающее состояние свободной точечной частицы), вопреки традиционным представлениям, совершенно строго выводится из соотношения Эйнштейна с помощью одного из основных постулатов квантовой механики — принципа соответствия.

Математический аппарат, используемый в книге, лишь чуть-чуть выходит за пределы курса нормальной средней школы.

Книга адресована преподавателям физики учебных заведений любого уровня и тем любознательным школьникам и студентам, которые изучают физику самостоятельно по монографиям и учебным пособиям.

Книга может также оказаться полезной специалистам, работающим в области физики элементарных частиц.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 17.10.2001 г.
Формат 60×84/16. Печ. л. 6.

Отпечатано в ООО «Атлас». Московская обл., г. Ногинск, ул. Гончарова, 12.

9 785354 000371

ISBN 5-354-00037-8

Оглавление

Глава 1

Проблема спина

«...элементарной частице следует приписывать некоторый "собственный" момент, не связанный с ее движением в пространстве. Это свойство является специфически квантовым ...и потому принципиально не допускает классической интерпретации».

(*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963, с. 227.)

«Наличие спина у микрочастицы означает, что в некоторых отношениях она подобна маленькому вращающемуся волчку. Однако эта аналогия чисто формальная...Собственный момент, согласно квантовой теории, может быть у точечной частицы».

(Физика микромира // Советская энциклопедия. М., 1980, с. 36.)

«...было бы совершенно бессмысленным представить себе "собственный" момент элементарной частицы как результат ее вращения вокруг "своей оси"».

(*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963, с. 227.)

«...часто встречающееся утверждение..., согласно которому "спин является чисто релятивистским эффектом", несостоятельно... Но утверждение Паули о спине как о "существенно квантово-механическом свойстве" продолжает оставаться справедливым, в чем легко убедиться, рассмотрев предельный случай $\hbar \to 0$*».*

(*М. Джеммер.* Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985, с. 156.)

«Спин есть неклассическая двузначность».

(Так нередко отвечал В. Паули на вопрос, что же такое спин.)

Уважаемый образованный читатель!

Знакомство с этой небольшой книгой Вы начинаете с эпиграфов, которые — поверьте — отражают общую точку зрения выдающихся физиков XX века на проблему спина. Эти эпиграфы призваны убедить нас, «простых смертных», в том, что даже Великие Умы считали и поныне считают спин точечной частицы самой загадочной ее характеристикой. Более загадочной, чем даже ее масса покоя и электрический заряд. Я попробую объяснить, почему это так.

Начну с замечания, что еще Аристотель хорошо понимал, что в качестве исходных данных любой системы логически содержательных утверждений могут быть приняты только неопределяемые понятия (то есть, понятия, которые невозможно выразить через другие понятия). К их числу относятся:

радиус-вектор точки пространства (проведенный из начала выбранной системы координат);

момент вечности (отсчитанный от некоторого события, выбранного в качестве начала отсчета времени);

импульс, масса покоя, электрический заряд, размеры материального объекта.

Ни одна из перечисленных величин не может быть выражена через другие величины.

Однако к числу неопределяемых понятий не относится механический момент точечной частицы.

Вот теперь легко объяснить, в чем состоит проблема спина. Для этого достаточно сопоставить три утверждения:

1) *мы определяем механический момент точечной частицы как векторное произведение радиус-вектора на импульс;*
2) *мы считаем спин точечной частицы также механическим моментом — «собственным» механическим моментом частицы;*
3) *мы отказываемся, однако, считать спин векторным произведением радиус-вектора на импульс.*

Как видим, налицо самое неприятное — логическое — противоречие: мы и даем определение механическому моменту и отказываемся от этого определения.

Замечу, что, будь, например, электрон шариком отличного от нуля радиуса, можно было бы вообразить его вращающимся вокруг любого из своих диаметров (вне зависимости от того, движется он еще прямолинейно или вращается, допустим, вокруг атомного ядра). В этом случае электрон обладал бы неким «собственным» механическим моментом. Увы, электрон (как и другие лептоны и кварки) — частица ***точечная****, а представление о точке, вращающейся вокруг оси, проходящей через эту же точку, и в самом деле лишено физической содержательности.*

Таким образом, проблема спина действительно существует, и если Вы не пожалеете времени на эту небольшую книгу, то, ручаюсь, потом с большим удовольствием вернетесь к эпиграфам. А теперь перейдем к разрешению проблемы спина.

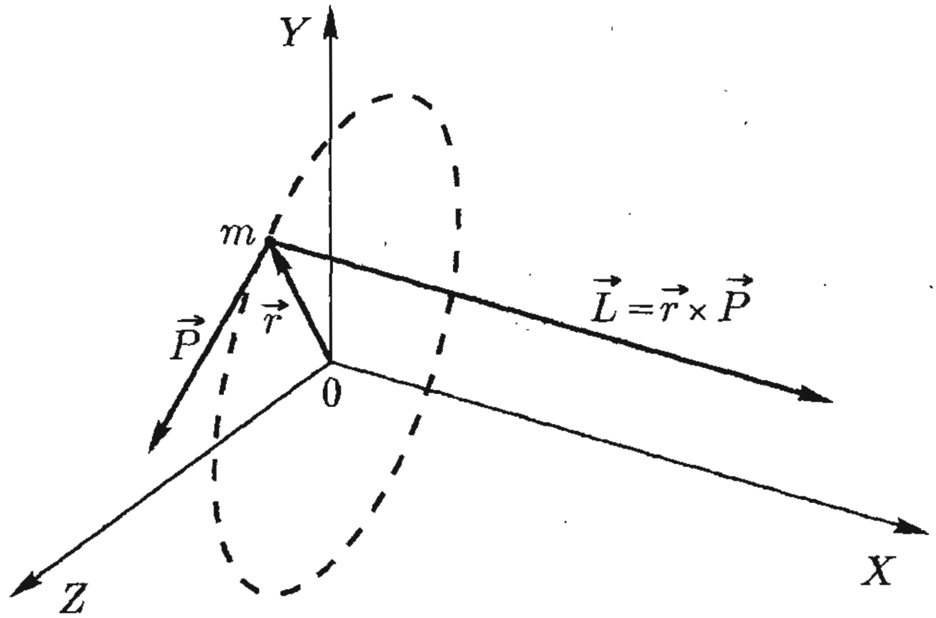


Рис. 1. Равномерное вращение точечной частицы по окружности вокруг оси X. Окружность лежит в плоскости $\{YZ\}$. Механический момент $(\vec{L})$ частицы параллелен оси X. Орбитальный импульс $(\vec{P})$ частицы в каждой точке окружности перпендикулярен ее радиусу $\vec{r}$

Сначала — некоторые пояснения.

Если в системе отсчета координат и времени точечная частица выглядит равномерно вращающейся по окружности (рис. 1), ее механический момент (обозначим его символом $\vec{L}$) равен

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки окружности, в которой находится частица, $\vec{P}$ — ее импульс. Подчеркну, что в рассматриваемом случае никакой другой импульс частице дополнительно не приписывают, и ее орбитальная скорость $(\vec{V})$ равна

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m}, \tag{2}$$

где m — масса движущейся частицы.

Вряд ли представленное на рис. 1 покажется непонятным, и вряд ли будут возражения против того, чтобы назвать ***орбитальным*** механический момент, определяемый выражением (1). Импульс $\vec{P}$ здесь — это импульс, приобретенный частицей либо при ее возникновении (при ее рождении), либо в результате воздействия на нее другого материального объекта (другой частицы, силового поля), причем до сих пор считается, что у импульса частицы другого происхождения быть не может. Если, приобретя импульс $\vec{P}$, частица более не участвует ни в каких взаимодействиях и столкновениях, то она сохраняет свой импульс неизменным.

Традиционно считается, что в этом случае она либо движется прямолинейно и равномерно — относительно выбранной системы отсчета, — либо покоится.

Теперь подчеркну, что логическое противоречие, содержащееся в системе утверждений, приведенных на с. 5, можно устранить единственным способом — отказаться от утверждения 3) и определить спин так же, как векторное произведение **некоего** радиус-вектора на **некий** импульс.

Таким образом я предлагаю рассматривать как

лишенное всякой физической содержательности представление о механическом моменте независимо от того, назвать его орбитальным или собственным (спином), если считать точечную частицу ***невращающейся.***

При этом понятие о вращении точечной частицы вокруг оси, проходящей через саму такую частицу, также должно считаться лишенным физической содержательности.

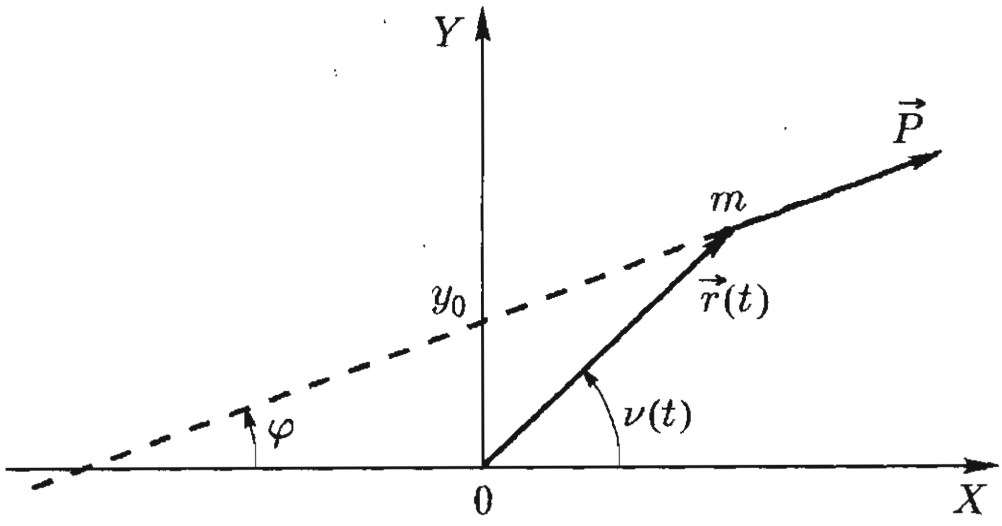
Если теперь вернуться к рис. 1 и сопутствующим рассуждениям, становится ясным, что ранее упомянутые **некий** радиус-вектор ($\vec{R}_0$) и **некий** импульс ($\vec{P}_0$) не имеют ничего общего с величинами $\vec{r}$ и $\vec{P}$, фигурирующими в выражении (1). Нашей задачей как раз и будет — установить, что же это за радиус-вектор $\vec{R}_0$ и что за импульс $\vec{P}_0$.

А вот заявления типа *«собственный момент (спин) частицы не связан с ее движением в пространстве и принципиально не допускает классической (а попросту говоря — наглядной) интерпретации»* (см. эпиграфы) нельзя квалифицировать иначе, как словесное прикрытие отказа от интерпретации вообще.

Давайте сами разберемся, что именно затрудняет интерпретацию, не пытаясь выяснить, по каким причинам отступились от нее авторы вышеупомянутых книг.

Для этого достаточно обратить внимание на то, что, согласно традиционным представлениям, равномерное вращение точечной частицы по орбите неизменного радиуса возможно лишь в случае, когда на частицу действует центростремительная сила. Но центростремительная сила — это сила притяжения частицы к центру орбиты, а эксперименты свидетельствуют: спином обладает частица, даже пребывающая в пустоте, где ей не к чему притягиваться.

Стало быть ***свободная*** (то есть пребывающая в пустоте) частица, если и может двигаться (относительно выбранной системы отсчета), то лишь прямолинейно (и равномерно). Хотя в этом случае вполне



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \neq 0, \quad L = y_0 \cdot P \cdot \cos\varphi.$$

Рис. 2. Иллюзия вращения.
Наблюдателю, сжавшемуся в точку O, кажется, что частица поворачивается вокруг оси Z (направленной на читателя): угол ν меняется во времени на 180°.
(Когда Вы смотрите из окна вагона поезда на удаленные предметы, то видите, как они «поворачиваются» (вокруг оси, перпендикулярной земной поверхности), даже если поезд движется заведомо параллельно этим предметам)

допустимо приписать частице механический момент $\vec{L}$ (рис. 2), однако значение его оказывается зависящим от выбора начала системы координат:

$$L = y_0 \cdot P \cdot \cos\varphi;$$

и, если $y_0 = 0$, то и $L = 0$. Эксперименты же свидетельствуют, что спин точечной частицы остается одним и тем же как в той системе отсчета, в которой частица выглядит движущейся (безразлично, прямолинейно и равномерно или же ускоренно), так и в той, в которой она выглядит покоящейся.

Итак, в рамках традиционных представлений считается, что,

по крайней мере пребывая в ***пустом*** *пространстве, точечная частица не может вращаться, но лишь двигаться прямолинейно и равномерно или покоиться.*

Однако — с другой-то стороны, — если верно, что частица обладает спином, значит физическая реальность состоит в том, что в глазах ***любого*** инерциального наблюдателя[1)] пребывающая в пустоте точечная

[1)] Все наблюдатели, движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно с различными по величине и (или) направлению скоростями, называются инерциальными. Таковых бесконечно много.

частица выглядит все же вращающейся независимо от участия ее в прямолинейном (и равномерном) движении.

Совершенно очевидно, что представления, восходящие еще к Ньютону и освященные столетиями, кое в чем противоречат физической реальности. В подобной ситуации обычно сталкиваются две точки зрения: «тем хуже для сложившихся представлений» и «тем хуже для реальности». В связи с подобной дилеммой мне показалось целесообразным и необходимым выдвинуть два предположения:

1) *точечная частица не может существовать иначе, как — вращаясь по некоей* ***собственной*** *орбите, обладая при этом* ***собственно-****орбитальным импульсом*;
2) *центр собственной орбиты выступает в роли центра инерции точечной частицы, причем именно* ***его*** *движение и* ***его*** *взаимодействие с другими объектами полностью соответствует* ***традиционным*** *представлениям о поведении точечной частицы*[2].

Следствием первого предположения является то, что *центр инерции точечной частицы не может присутствовать в той же точке пространства, в которой — в данный момент времени — присутствует сама частица.*

Разумеется, нужно быть готовым к тому, что сделанные предположения породят немало серьезных проблем, которые придется решать. Например, сразу же бросается в глаза, что сделанные предположения несовместимы с общеизвестной формулой для энергии точечной свободной частицы

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m} = \frac{m \cdot \vec{V}^2}{2}.$$

Ведь, если переадресованный центру инерции импульс $(\vec{P})$ частицы равен нулю $(\vec{P} = 0)$, то и $\vec{V} = 0$, и $E = 0$. Но вращающаяся, согласно предположению, частица не может не обладать энергией (кинетической), пусть даже импульс центра инерции (центра орбиты) равен нулю.

Однако..., нет ли чего-то, ускользнувшего от внимания научной общественности, что могло бы подкрепить сделанные предположения?

[2] В этом случае центру инерции (точке) переадресуются абсолютно все характеристики частицы в том числе и спин, коль скоро оказывается, что бесспиновых точечных частиц в природе не существует.

Глава 2
Формула Эйнштейна

Что касается спина, то высказываний подобных тем, какие приведены в эпиграфах, можно найти — причем в строго научной литературе — очень много. Но сколько ни искал я аналогичных высказываний по поводу знаменитой формулы

$$E = m \cdot ç^2, \tag{3}$$

не нашел ни одного. Очевидно здесь всем все и навсегда стало ясно, как только Эйнштейн эту формулу в 1905 году написал.

Напомню, что присутствующие в формуле (3) величины E, m, $ç$ применительно к точечной свободной (ни с чем не взаимодействующей) частице называются: «полная энергия», «масса движения», «скорость света в пустоте».

Величину m очень часто представляют в виде

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{ç}\right)^2}}.$$

В этой формуле не только величина m_0 (так называемая масса покоя), но и $\vec{V}$ (скорость частицы относительно выбранной системы отсчета) должна выступать в роли исходного (самостоятельного) понятия. Однако, поскольку скорость $\vec{V}$ не принадлежат к числу таких понятий, следует использовать представление массы m в виде:

$$m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot ç}\right)^2}. \tag{4}$$

Здесь m_0 — все та же масса покоя (то есть масса, измеренная в системе отсчета, в которой $\vec{P} = 0$), а $\vec{P}$ — уже упоминавшийся импульс частицы, переадресованный ее центру инерции — центру гипотетической собственной орбиты[1].

Если значение импульса $\vec{P}$ очень мало по сравнению с величиной $(m_0 \cdot ç)$, можно считать, что с хорошей точностью $m \approx m_0 + \dfrac{P^2}{2m_0 \cdot ç^2}$,

[1] Стоит обратить внимание на то, из формулы (4) следует существование и «безмассовой» частицы ($m_0 = 0$), которая не может в принципе выглядеть покоящейся ни в какой

и тогда формула (3) предстает в виде:

$$E \approx m_0 \cdot \varsigma^2 + \frac{P^2}{2m_0} = m_0 \cdot \varsigma^2 + \frac{m_0 \cdot V^2}{2}. \tag{5}$$

Именно с помощью этой формулы обычно и объясняют, в чем состоит одно из открытий Эйнштейна. Оказывается, что даже в той системе отсчета, в которой точечная и свободная (ни с чем не взаимодействующая) частица покоится ($\vec{P} = 0$, $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{m_0} = 0$), ее энергия не равна нулю:

$$E(\vec{P} = 0) \equiv E_0 = m_0 \cdot \varsigma^2. \tag{6}$$

Это крайне важное обстоятельство. Ведь если полная энергия материального объекта равна нулю точно, и он занимает в пространстве нулевой объем, существование его ни в чем не может проявиться[2]. До Эйнштейна энергия точечной и свободной частицы считалась равной

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0} = \frac{m_0 \vec{V}^2}{2}, \tag{7}$$

так что при $\vec{P} = 0$ ($\vec{V} = 0$) и величина $E = 0$.

Сейчас в интересах более-менее искушенного читателя имеет смысл сделать небольшое отступление.

Доэйнштейновское соотношение, инвариантное относительно преобразований Галилея, имеет вид:

$$E_j - \frac{\vec{P}_j^2}{2m_0} = E_k - \frac{\vec{P}_k^2}{2m_0} = E_0, \tag{8}$$

где индексы j и k символизируют величины, отнесенные к соответствующей инерциальной системе отсчета.

Конечно, только эксперимент может ответить на вопрос, чему именно равна величина E_0 — инвариант преобразований. Однако, оставаясь в рамках чисто математических конструкций и понятий, вполне допустимо приписать

системе отсчета, не связанной с самой частицей:

$$\lim_{m_0 \to 0} m = \lim_{m_0 \to 0} m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2} = \frac{P}{\varsigma}; \quad V = \frac{P}{m} = \varsigma.$$

Здесь и далее символом P обозначен **модуль** импульса.

[2] Более чем загадочно должны выглядеть также и объекты: занимающие нулевой объем пространства, но обладающие ненулевой энергией; занимающие ненулевой объем пространства, но обладающие нулевой полной энергией. Скоро читатель убедится в том, что даже точечному объекту для своего существования требуется отнюдь не бесконечно малый объем пространства.

величине E_0 (инварианту преобразований) любое численное значение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. При этом равенство $(E - E_0) - \dfrac{\vec{P}^2}{2m_0} = 0$ сохраняется во всех инерциальных системах отсчета. Вот это и есть то, что называется «энергия свободной точечной частицы определена лишь с точностью до произвольной постоянной».

Эйнштейновское соотношение (между величинами E, $\vec{P}$, m_0), инвариантное относительно преобразований Лоренца и потому считающееся **истинным**, имеет вид:

$$E_j^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_j^2 = E_k^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_k^2 = E_0^2. \tag{9}$$

Вновь, лишь эксперимент может ответить на вопрос, чему именно равна величина E_0^2 $(0 < E_0^2 < \infty)$. Однако конструкция

$$\left\{(E - E_0)^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\right\},$$

которая могла бы позволить считать энергию E определенной лишь с точностью до произвольной постоянной, **не является инвариантом преобразований.** Следовательно **энергия свободной точечной частицы определена выражением (9) точно при том, что само это выражение истинно.**

На этом отступление закончено, и я предлагаю вернуться к самому началу этой главы. Используя простые алгебраические преобразования, соотношение (3) можно представить в виде:

$$E = \begin{cases} \varsigma \cdot \sqrt{\vec{P}^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}; & (10, \text{а}) \\ \dfrac{\vec{P}^2 + P_0^2}{m(P)}. & (10, \text{б}) \end{cases}$$

В этих выражениях:

m_0 — масса покоя, которая в отличие от массы движения m является характеристикой-константой частицы. Именно величина m_0 (ее численное значение) и есть признак ***качественного*** отличия частицы, принадлежащей к определенной разновидности, от всех остальных материальных объектов. Взаимодействуя с ними, «наша» частица остается тождественной самой себе (себетождественной) лишь постольку, поскольку ее масса покоя m_0 остается неизменной;

$m\,(P)$ — масса движения, зависящая от значения импульса $\vec{P}$;

$P_0^2 \equiv m_0^2 \cdot \varsigma^2$.

Из выражений (10) следует, что действительно существует инерциальная система отсчета (относительно нее импульс $\vec{P} = 0$), в которой

$$E\left(\vec{P} = 0\right) \equiv E_0 = \frac{P_0^2}{m_0} = m_0 \cdot \varsigma^2 \neq 0.$$

Как же интерпретировали выражения (10)? А никак! Величинам же E, E_0 и P_0 просто дали названия — полная энергия, энергия покоя, импульс покоя[3] — и этим ограничились[4].

Однако следует обратить особое внимание на то, что физическая интерпретация выражений (10) и величин E, E_0 и P_0 была совершенно необходимой, поскольку выражения (10) были получены путем чисто математических операций с использованием ряда постулатов.

Давайте тогда займемся интерпретацией сами, руководствуясь логикой, а также законами механики и словообразования.

Начнем с терминов.

Энергию E точечной и свободной (то есть пребывающей в пустоте) частицы назвали ***полной***. Однако..., уважаемый читатель, обратите внимание на то, что термин «***полная*** энергия» применительно к ***точечной свободной*** частице лишен какой бы то ни было определенности.

Физической содержательностью обладают такие понятия, как потенциальная и кинетическая энергия. Если точечная частица движется в силовом поле, то «*полной*» энергией нужно и можно называть *сумму потенциальной* энергии взаимодействия частицы с полем и ее *кинетической* энергии.

Можно тем не менее придать смысл такому понятию, как *полная кинетическая* энергия точечной частицы, если она участвует в движениях разного характера.

Можно придать смысл понятию *полная потенциальная* энергия точечной частицы, если она взаимодействует сразу с несколькими объектами (например, с силовыми полями различной природы). Что касается объекта конечных и ненулевых размеров, то такой объект может обладать «внутренней» потенциальной энергией взаимодействия *частей* друг с другом, даже если эти части и их центр инерции не участвуют в движении и не взаимодействует с внешним силовым полем.

Совершенно ясно, что *точечная* и *свободная* частица не может обладать потенциальной энергией: у нее нет частей, которые могли бы взаимодействовать друг с другом; она пребывает в пустом пространстве, в котором ей не с чем взаимодействовать. В таком случае

---

[3] Термин «*импульс покоя*» представляется совершенно бессмысленным: в этом словосочетании первое полностью противоречит второму.

[4] В связи со сказанным следует иметь в виду, что уже примерно 300 лет исследователи очень часто добиваются успехов в изучении явлений природы, сознательно ограничиваясь одним только их **математическим описанием**. То есть — сознательно уклоняясь от проникновения в их физическую природу. В этой книге не имеет смысла анализировать причины подобного уклонения. Они были различны в разные научно-технические эпохи.

величина E, фигурирующая в соотношениях (10), может быть только *полной кинетической* энергией[5].

Вернемся еще раз к выражению (10, б) для полной, но теперь уже полной *кинетической* энергии

$$E = \frac{\vec{P}^2}{m(P)} + \frac{P_0^2}{m(P)}.$$

Теперь ясно, что полная кинетическая энергия свободной точечной частицы состоит из **двух** компонент. Таким образом, частица обязана выглядеть движущейся даже в той системе отсчета (координат и времени), в которой $\vec{P} = 0$. Ведь, согласно выражениям (10), в этой системе отлична от нуля именно кинетическая энергия E:

$$E\left(\vec{P} = 0\right) \equiv E_0 = m_0 \cdot ç^2 \neq 0.$$

Стало быть, вообще не существует инерциальной системы отсчета, где выглядела бы покоящейся даже такая частица, масса «покоя» которой (m_0) отлична от нуля. Но это значит, что движение частицы, которому отвечает составляющая кинетической энергии $\frac{P_0^2}{m(P)}$, является абсолютным, и характер его должен быть одинаков в глазах *любого* инерциального наблюдателя. Именно таким является равномерное вращение точечной частицы с орбитальной скоростью, модуль которой имеет одинаковое значение в любой инерциальной системе отсчета[6]. Поэтому предлагается постулировать, что:

1) *точечная частица, к какой бы разновидности она ни принадлежала и какой бы массой ни обладала, вообще не может существовать иначе, как обязательно вращаясь — двигаясь по поверхности сферы конечного радиуса*;
2) *центр этой сферы играет роль центра инерции точечной частицы, причем такого центра, который никогда не присутствует в одной и той же точке пространства одновременно с самой частицей*;
3) *этот центр может и покоиться, и двигаться относительно инерциальной системы отсчета со скоростью $\vec{V}_{\text{ц.и.}} = \frac{\vec{P}_{\text{ц.и.}}}{m_{\text{частицы}}\left(P_{\text{ц.и.}}\right)}$ как прямолинейно и равномерно, так и ускоренно, в том числе, в свою*

---

[5] Экспериментально доказано, что соотношения (10) справедливы именно для точечной свободной частицы.

[6] В таком случае модуль этой скорости должен быть равен константе ç, умноженной на некоторое число, возможно и равное единице, а возможно и нет.

очередь, вращаясь вокруг пространственных осей. Во всех движениях (и в пустом пространстве, и в силовом поле) именно центру инерции переадресуется тот импульс $\vec{P}$, которым на самом деле обладает (от рождения) или который приобретает частица, но который не связан с собственно-орбитальным ее движением. Так что $\vec{P}_{\text{ц.и.}} \equiv \vec{P}$.

Теперь самое время вернуться к проблеме спина.

Обратите внимание: мы нашли те самые **«некий радиус-вектор»** и **«некий импульс»**, не имеющие никакого отношения к радиус-вектору и импульсу центра инерции, но вполне способные образовать желанное векторное произведение — спин.

Давайте рассмотрим состояние точечной и свободной частицы, расположившись в системе отсчета, относительно которой $\vec{P} = 0$. Предположение, что и в этой системе частица выглядит движущейся (вращающейся), и стало быть обладающей импульсом (собственно-орбитальным) и энергией (кинетической), несовместимо, как уже отмечалось с доэйнштейновским выражением

$$E = \left(\frac{\vec{P}^2}{2m_0}\right) = \left(\frac{m_0 \cdot \vec{V}^2}{2}\right),$$

из которого следует, что если $\vec{P} = 0$, то и $\vec{V} = 0$, и $E = 0$.

Однако сделанное выше предположение вполне совместимо с формулой Эйнштейна, из которой следует, что

$$E\left(\vec{P} = 0\right) = m_0 \cdot \varsigma^2 \neq 0.$$

Следует учесть, что здесь величина ς уже никакая не скорость света, а либо собственно-орбитальная скорость частицы, либо проекция этой скорости на какую-то ось координат (с этим еще предстоит разобраться)[7]. Бывший импульс «покоя» P_0 ($\equiv m_0 \cdot \varsigma$) превращается в собственно-орбитальный импульс частицы.

Теперь наступает этап, на котором необходимо тщательно проанализировать новое представление о том состоянии, в котором находится точечная частица, пребывающая в пустом пространстве.

[7] Согласитесь, что, вообще говоря, совершенно непонятно, почему скорость распространения фронта электромагнитной волны должна присутствовать в выражении для энергии точечной частицы, пребывающей в пустом пространстве. Теперь ясно, что лишь **численное** значение собственно-орбитальной скорости частицы (или ее проекции на какую-нибудь из осей координат) совпадает с численным значением скорости света.

Глава 3

Новые проблемы и их решения

В конце гл. 1 было отмечено, что новое представление о спине точечной частицы способно породить немало серьезных проблем, которые затем придется решать. Так оно и оказалось.

3.1. Первая проблема

Чтобы выявить первую проблему, нужно отождествить себя с точечным наблюдателем (Ц-наблюдателем), расположившимся в центре (Ц) собственно-орбитального круга, через который проходят оси координат δ и γ (рис. 3). Простоты ради допустимо считать частицу вращающейся лишь в одной плоскости — плоскости рисунка.

Если поинтересоваться, какими понятиями должен (или может) оперировать Ц-наблюдатель, описывая вращение частицы по стационарной орбите-окружности, вряд ли кто-то решится исключить из их числа центростремительное ускорение. Однако, если считать, что частица пребывает в *пустом* пространстве, где ей не к чему притягиваться, то о центростремительном ускорении ($\vec{a}_{\text{цс}}$) придется забыть. Ведь $\vec{a}_{\text{цс}} \propto \vec{F}_{\text{цс}}$, а в пустом пространстве центростремительной силе $\vec{F}_{\text{цс}}$ (силе притяжения частицы к центру собственной орбиты) неоткуда взяться ($\vec{F}_{\text{цс}} \equiv 0$).

Таким образом проблема действительно существует — в описании вращения частицы ***свободной***, пребывающей в ***пустом*** пространстве[1]. Нужно суметь так описать вращение, чтобы не потребовалось прибегать к понятию «ускорение», чтобы исключить само представление о непрерывном изменении скорости частицы во времени.

Попробуем сделать это на примере частицы, вращающейся в плоскости.

Вращение именно свободной частицы по окружности назовем собственным вращением, окружность эту — собственной орбитой и т. п.

[1] Речь пока что идет именно об описании вращения, а не о том, чтобы объяснить, по какой причине частица вращается.

$$\vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_\perp) = \text{const} \neq 0; \quad \vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}_\text{ц}) = 0.$$

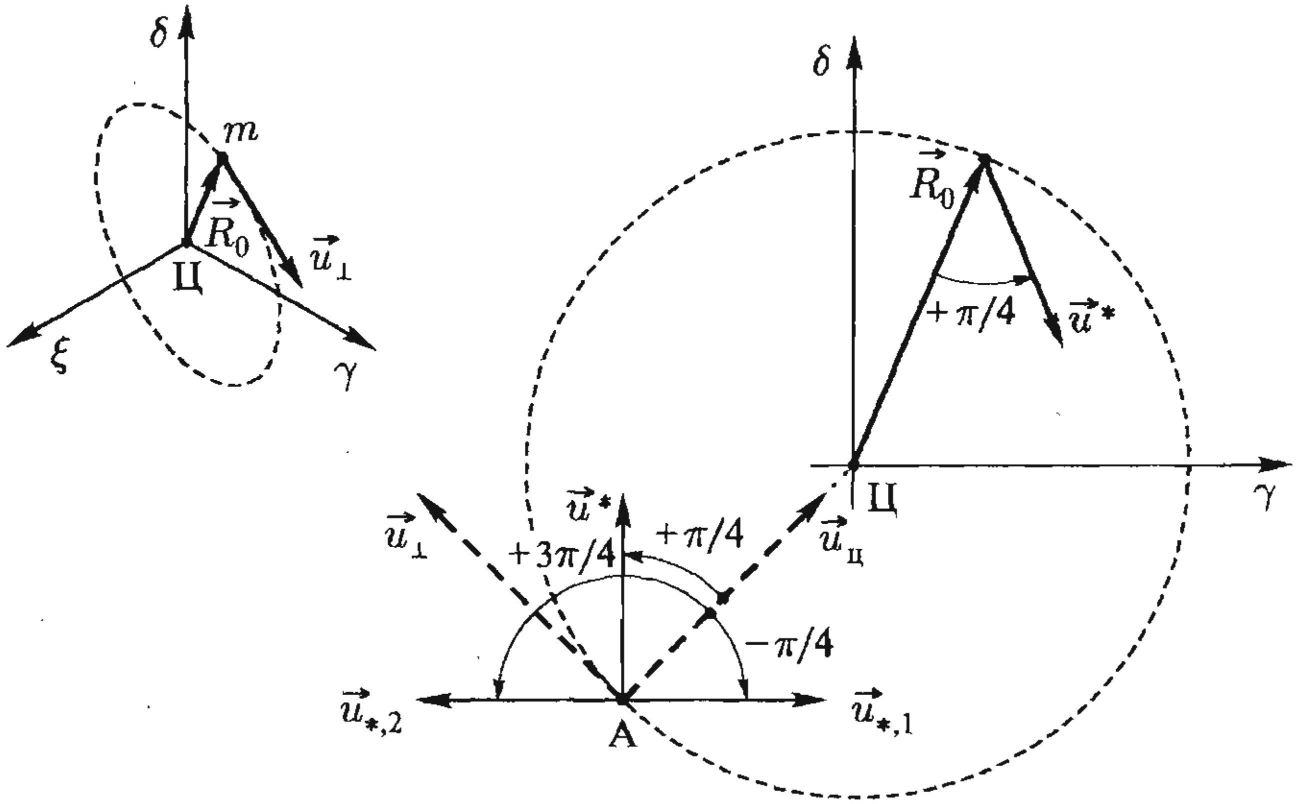


Рис. 3. Вращение точечной свободной частицы глазами Ц-наблюдателя. Собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$ в любой точке орбиты может быть с равной вероятностью направлена как по радиусу к центру (тогда она обозначена символом $\vec{u}_\text{ц}$), так и перпендикулярно радиусу (обозначена символом $\vec{u}_\perp$); при этом $|\vec{u}_\perp| = |\vec{u}_\text{ц}| = |\vec{u}_0| = \sqrt{2}\varsigma$.

В свою очередь, скорость $\vec{u}_\perp$ можно разложить на составляющие $\vec{u}^*$ и $\vec{u}_{*,2}$, а скорость $\vec{u}_\text{ц}$ на составляющие $\vec{u}^*$ и $\vec{u}_{*,1}$. Тогда можно считать, что собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$ представляет собой сумму двух векторов. Один из них ($\vec{u}^*$) точно определен ***и по модулю, и по направлению*** (составляет угол $+\frac{\pi}{4}$ с радиусом $\vec{R}_0$ в любой точке орбиты). Другой ($\vec{u}_*$) точно определен по модулю, но не по направлению (составляет с радиусом $\vec{R}_0$ углы $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{3\pi}{4}$ с равной вероятностью). При этом

$$\vec{u}_\text{ц} = \vec{u}_{*,1} + \vec{u}^*; \quad \vec{u}_\perp = \vec{u}_{*,2} + \vec{u}^*; \quad |\vec{u}^*| = |\vec{u}_*| = \varsigma.$$

В точке А именно вектор $\vec{u}^*$ представляет собой усредненную по времени проекцию собственно-орбитальной скорости частицы на ось δ

Затем нужно вспомнить, что новая интерпретация знаменитого соотношения Эйнштейна (см. формулы (10)) вынудила считать абсолютное значение собственно-орбитальной скорости частицы одинаковым в любой инерциальной системе отсчета. В таком случае это значение не может не быть равным константе ς, умноженной на некоторое число (возможно, равное единице, а, возможно, и нет).

Теперь выдвинем фундаментальное предположение, что ***собственно-орбитальная скорость частицы в точке орбиты*** (см. рис. 3), ***оставаясь по абсолютному значению равной — допустим — $\sqrt{2}ç$, с одинаковой вероятностью направлена и по радиусу к центру собственно-орбитального круга, и перпендикулярно радиусу*** (например, по часовой стрелке). В этом случае скорость, будучи усредненной по времени, окажется направленной как раз туда, куда требуют законы классической кинематики вращательного движения.

Следует обратить внимание на то, что в механику приходится вводить, казалось бы, совершенно чуждое ей понятие «вероятность». Однако лишь таким путем удается сохранить за частицей право считаться свободной, но при том равномерно вращающейся по окружности (рис. 3).

Действительно, если вращающаяся частица существует вечно, то ***бесконечно много*** мгновений (хотя и разделенных равными промежутками времени) Ц-наблюдатель видит частицу (в точке А) обладающей скоростью, всякий раз одной и той же как по абсолютному значению ($= \sqrt{2}ç$), так и по направлению (**по радиусу в центр круга**). Но именно у ***свободной*** частицы скорость ***вечно*** одна и та же и по абсолютному значению, и по направлению.

Однако кроме только что сделанного утверждения столь же справедливо и другое: если вращающаяся частица существует вечно, то ***бесконечно много*** мгновений (хотя и разделенных равными промежутками времени) Ц-наблюдатель видит частицу (в точке А) обладающей скоростью, всякий раз одной и той же как по абсолютному значению ($= \sqrt{2}ç$), так и по направлению (**перпендикулярно радиусу и по часовой стрелке**).

Тем не менее, уже ***обоснованно*** считая частицу свободной, Ц-наблюдатель замечает, что, в какой бы точке окружности ни представала перед его глазами частица, она обладает еще и вполне определенным — одним и тем же по абсолютному значению и по направлению — собственным механическим моментом (***спином***) $\vec{S}$, равным

$$\vec{S} = \vec{R}_0 \times \vec{P}_0 = \vec{R}_0 \times \big(m(P) \cdot \vec{u}_0\big).$$

В этом выражении: $\vec{R}_0$ — радиус-вектор точки собственной орбиты (проведенный в точку из центра орбиты), а собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$, согласно сделанному выше предположению, равна (см. рис. 3)

$$\vec{u}_0 = \begin{cases} \vec{u}_\perp \\ \vec{u}_\text{ц} \end{cases} \text{с одинаковой вероятностью.}$$

Как следует из рис. 3, усредненное по времени значение δ-проекции скорости $\vec{u}_0$ равно $\vec{u}^*$. Поэтому усредненный по времени спин, который далее и будет называться просто спином, определяется выражением

$$\vec{S} = \vec{S}_\xi = \vec{e}_\xi \cdot S = \vec{R}_0 \times (m \cdot \vec{u}^*)\,, \qquad (11,\text{а})$$

где $\vec{e}_\xi$ — орт системы координат $\{\delta\gamma\xi\}$, проходящий через точку Ц перпендикулярно плоскости $\{\delta\gamma\}$.

Поскольку вектор $\vec{u}^*$ можно считать δ-проекцией вектора $\vec{u}_0$ (не будем больше вспоминать об усреднении), выражение (11, а) удобно представить в виде

$$\vec{S}_\xi = \vec{R}_{0,\gamma} \times \left(m \cdot \vec{u}_{0,\delta}\right) = \vec{e}_\gamma \cdot \left(R_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \vec{e}_\delta \cdot (m \cdot \varsigma) =$$

$$= \vec{e}_\xi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\varsigma \cdot R_0 \cdot m\right)^{2)}, \qquad (11,\text{б})$$

где $\vec{R}_{0,\gamma}$ — γ-проекция вектора $\vec{R}_0$, а R_0 — его модуль.

Итак, удалось совместить представление о точечной ***свободной*** частице с представлением о ее равномерном ***вращении*** по орбите определенного радиуса.

Теперь хотелось бы привлечь внимание читателя к формуле (11, б), которая в реальном — трехмерном — случае принимает вид

$$\vec{S}_\xi = \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{3}}\right) \cdot \vec{e}_\xi \cdot \left(R_0 \cdot m(P)\right). \qquad (11,\text{в})$$

Уже давным-давно известно, что модуль проекции спина на выбранную ось координат точно равен $\frac{\hbar}{2}$, а модуль спина равен $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$. Но это означает также и то, что физическая характеристика частицы — спин — обладает **одинаковым** значением в глазах **любого** инерциального наблюдателя. В подобном случае **произведение** $(R_0 \cdot m)$ **должно быть инвариантом лоренцевых преобразований величин** R_0 **и** m! А это, действительно так?!

Поясню, почему такой вопрос, да еще с некоторой экспрессией.

Мало доказать, что точечная частица, даже считаясь свободной, вращается по собственной орбите конечного и ненулевого радиуса,

---

[2] В трехмерном (реальном) случае оказалось бы, что

$$\vec{S}_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \left(R_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (m \cdot \varsigma) = \vec{e}_\xi \cdot \left(\frac{\varsigma \cdot R_0 \cdot m}{\sqrt{3}}\right).$$

а потому, естественно, обладает собственным механическим моментом (спином). Могло ведь оказаться, что произведение $(R_0 \cdot m)$ имеет **разное** значение в глазах **разных** инерциальных наблюдателей.

Таким образом, поставленный вопрос действительно крайне важен. И вот — ответ: *если в произведении $(R_0 \cdot m)$ величина R_0 является значением именно* ***радиуса*** *именно* ***собственной*** *орбиты (по которой частица движется со скоростью, модуль которой является константой),* ***произведение $(R_0 \cdot m)$ есть один из инвариантов лоренцевой группы формул преобразований физических величин***[3].

[3] Формулы преобразования полной кинетической энергии и массы движения частицы — величин, отнесенных к тем точкам пространства, в которых наблюдатель видит саму частицу (а не ее центр инерции), — выглядят следующим образом:

$$E_j = \frac{E_k \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2}}; \quad m_j = \frac{m_k \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2}}.$$

Здесь индексы j и k символизируют величины, отнесенные к соответствующим инерциальным системам отсчета, которые движутся друг относительно друга со скоростью V_0 вдоль общей коодинатной оси.

Формула преобразования частоты вращения частицы по собственной орбите имеет вид:

$$\omega_j = \frac{\omega_k \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2}}.$$

Поскольку величины ω и R_0 связаны соотношением $\omega \cdot R_0 = \sqrt{3}\varsigma$, формула преобразования радиуса выглядит следующим образом:

$$R_{0,j} = \frac{R_{0,k} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2}}{\left(1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)\right)}.$$

Теперь получаем:

$$R_{0,j} \cdot m_j = R_{0,k} \cdot m_k = \mathrm{Inv}_1; \quad \frac{E_j}{\omega_j} = \frac{E_k}{\omega_k} = \mathrm{Inv}_2.$$

Разумеется, только эксперимент может ответить на вопрос, чему именно равен каждый из инвариантов. Если оказывается, что $\mathrm{Inv}_1 = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2\varsigma}$, то из формулы (11, в) следует, что $|\vec{S}_\xi| = \frac{\hbar}{2}$, а тогда $|\vec{S}| = \frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2}$.

Что же касается инварианта Inv_2, то, как оказалось, $\mathrm{Inv}_2 = \frac{\hbar}{2}$.

3.2. Вторая проблема

Вторая проблема состоит в объяснении, почему собственно-орбитальной скорости $\vec{u}_0$ нужно приписать значение $\sqrt{2}\varsigma$ (а не, например, ς).

Вызвано это необходимостью предотвратить нарушение предварительного условия применимости формул преобразования, принадлежащих группе Лоренца, и, в частности, формулы преобразования скорости[4]. Условие это, приспособленное к нашему двумерному случаю, должно было бы иметь вид:

$$u_\delta^2 + u_\gamma^2 \leqslant \varsigma^2, \tag{12}$$

где u_δ и u_γ — проекции скорости непосредственно самой частицы на оси координат инерциального Ц-наблюдателя.

Для частицы, значение скорости которой одинаково для любого инерциального наблюдателя, нужно убрать из соотношения (12) знак $<$, после чего условие, за соблюдением которого далее придется следить, должно было бы принять вид:

$$u^2 = u_\delta^2 + u_\gamma^2 = \varsigma^2. \tag{13}$$

Согласно одному из постулатов частной теории относительности, частицу, значение скорости которой равно ς точно, ***необходимо*** считать свободной. Разумеется, никогда раньше не возникало и тени сомнения в том, что ***свободная*** частица может двигаться ***только прямолинейно и равномерно***, существуя вечно и пребывая в бесконечно протяженном пустом пространстве. А тогда имеет место совпадение скоростей: мгновенной $\vec{V}(t)$ и усредненной по бесконечно большому промежутку времени $\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\vec{V}(t)\cdot dt\right\}$.

---

[4] Частная теория относительности постулирует, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой значения физических характеристик частицы (энергии, импульса, массы движения, скорости, механического момента) должны быть изменены (преобразованы) в соответствии с формулами, впервые введенными в физику Г. А. Лоренцом. Например, X-проекции скорости частицы $\vec{V}$ в двух системах отсчета, движущихся друг относительно друга со скоростью V_0 вдоль общей X-оси, связаны соотношением

$$V_{x,2} = \frac{V_{x,1} - V_0}{1 - \left(\frac{V_{x,1}\cdot V_0}{\varsigma^2}\right)}.$$

Следует, однако, иметь в виду, что общеизвестный вид лоренцевых формул преобразования относится к центру инерции точечной частицы (к центру ее собственно-орбитальной сферы).

Отмеченное выше совпадение скоростей представим в виде

$$\left\langle \vec{V} \right\rangle_{\Delta t} = \vec{V}(t). \tag{14, а}$$

Коль скоро решено, что скорость частицы точно равна ς, то

$$\left|\left\langle \vec{V} \right\rangle_{\Delta t}\right| = \left|\vec{V}(t)\right| = \varsigma. \tag{14, б}$$

Если частица участвует только в прямолинейном движении со скоростью, точно равной ς, проекции этой скорости на оси координат следует преобразовывать по формулам, принадлежащим лоренцевой группе. Это известно с 1905 года. Но, что если частица участвует в двух независимых движениях: прямолинейном со скоростью, меньшей ς, и вращательном со скоростью, например, точно равной ς? По каким формулам следует преобразовывать проекции орбитальной скорости? А результирующей?

Я попробую ответить на эти вопросы в § 6.4. Пока же достаточно принять во внимание следующее обстоятельство.

Существование частицы, способной двигаться только ***прямолинейно и равномерно*** со скоростью, равной по модулю точно ς, есть необходимое условие возможности обмена информацией между инерциальными наблюдателями[5]. А только этот обмен позволяет: либо гарантировать (подтвердить) истинность ***постулированных*** формул преобразования физических величин (при переходах от одной системы отсчета к другой); либо ***экспериментально*** установить вид этих формул.

Что же касается собственно-орбитальной скорости ***вращательного*** движения частицы, то хотя и оказалось необходимым постулировать одинаковость абсолютного значения и этой скорости для любого инерциального наблюдателя, но совершенно необязательно требовать совпадения этого значения с величиной ς. Ведь не в результате собственного вращения частицы перемещается информация (сигнал) между инерциальными наблюдателями (движущимися друг относительно друга прямолинейно и равномерно).

Поэтому для вращающейся частицы условие (13) *нужно изменить так, чтобы новое условие с одной стороны не препятствовало использованию традиционных — проверенных — формул преобразования физических величин, а с другой стороны не мешало при необходимости приписать модулю собственно-орбитальной скорости значение, отличное от* ς.

Имея перед глазами соотношения (14, а, б) и располагая определениями содержащихся в них скоростей, следует обратить внимание

[5] Выполнять функции сигнала может лишь такая частица, модуль скорости которой имеет одинаковое значение относительно любого инерциального наблюдателя, которая движется прямолинейно и не подвержена ускорению.

на то, что на самом деле еще не определены те величины u, которые фигурируют в соотношениях (12) и (13). Чтобы ликвидировать этот недостаток, придется взять на себя смелость отождествить их со скоростями, например, ***усредненными по времени***[6]. Тогда можно предложить для случая частицы, вращающейся по собственной орбите, например, такую модификацию условия (13):

$$\left(\langle u_\delta\rangle_{\Delta t}\right)^2+\left(\langle u_\gamma\rangle_{\Delta t}\right)^2=$$
$$=\left[\left\langle u^*_\delta(\delta,\gamma)+u_{*\delta}(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t}\right]^2+\left[\left\langle u^*_\gamma(\delta,\gamma)+u_{*\gamma}(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t}\right]^2=\varsigma^2. \qquad (15)$$

В этой формуле $u_{*\delta}$, $u_{*\gamma}$ — проекции той составляющей собственно-орбитальной скорости, которая равное число мгновений направлена в противоположные стороны, а u^*_δ, u^*_γ — проекции той составляющей, которая всегда направлена в одну сторону. В результате получаем, что

$$\left\langle u^*_\delta(\delta,\gamma)+u_{*\delta}(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t}=\left\langle u^*_\delta(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t}=u^*_\delta(\delta,\gamma,t)\ ^{7)},$$
$$\left\langle u^*_\gamma(\delta,\gamma)+u_{*\gamma}(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t}=\left\langle u^*_\gamma(\delta,\gamma)\right\rangle_{\Delta t}=u^*_\gamma(\delta,\gamma,t)\ ^{7)},$$

откуда и следует возможность приравнять абсолютное значение составляющей $\vec{u}^*$ величине ς:

$$[\vec{u}^*(\delta,\gamma,t)]^2=\left[u^*_\delta(\delta,\gamma,t)\right]^2+\left[u^*_\gamma(\delta,\gamma,t)\right]^2=\varsigma^2. \qquad (16)$$

Как видим, условие (15) согласуется с новыми представлениями о собственном вращении свободной частицы.

При этом автоматически:

$$\left|\vec{u}_0(\delta,\gamma,t)\right|=\sqrt{\left[\vec{u}^*(\delta,\gamma,t)\right]^2+\left[\vec{u}_*(\delta,\gamma,t)\right]^2}=\sqrt{\varsigma^2+(\pm\varsigma)^2}=\sqrt{2}\varsigma. \qquad (17)$$

Заметим, что в реальном — трехмерном — пространстве

$$\left|\vec{u}_0(\delta,\gamma,\xi,t)\right|=\sqrt{3}\varsigma,$$

но по-прежнему лишь ***одна*** из составляющих собственно-орбитальной скорости (уже из трех) точно определена как по абсолютному значению (равному ς), так и по направлению. Ведь необходимо учесть еще и то, что в трехмерном пространстве частицу придется считать вращающейся вокруг ***любой из физически идентичных*** осей (δ,γ,ξ) и, естественно, с равной вероятностью.

---

[6] Вполне достаточно усреднения по промежутку времени, гораздо большему, чем период собственного вращения, который может оказаться чрезвычайно малым (см. с. 50).

[7] Имеются в виду те моменты времени (t), в которые частица появляется перед глазами Ц-наблюдателя в точке с координатами $\{\delta_A,\gamma_A\}$.

Теперь выясним, каким представляет себе вращение свободной частицы по собственной орбите наблюдатель, начало координат которого смещено относительно начала координат Ц-наблюдателя, расположенного в центре собственно-орбитального круга (рис. 4). Будем пока считать, что наблюдатели друг относительно друга покоятся.

Как следует из рис. 4, любой наблюдатель обязательно найдет на орбите-окружности точку, в которой — в моменты появления в ней

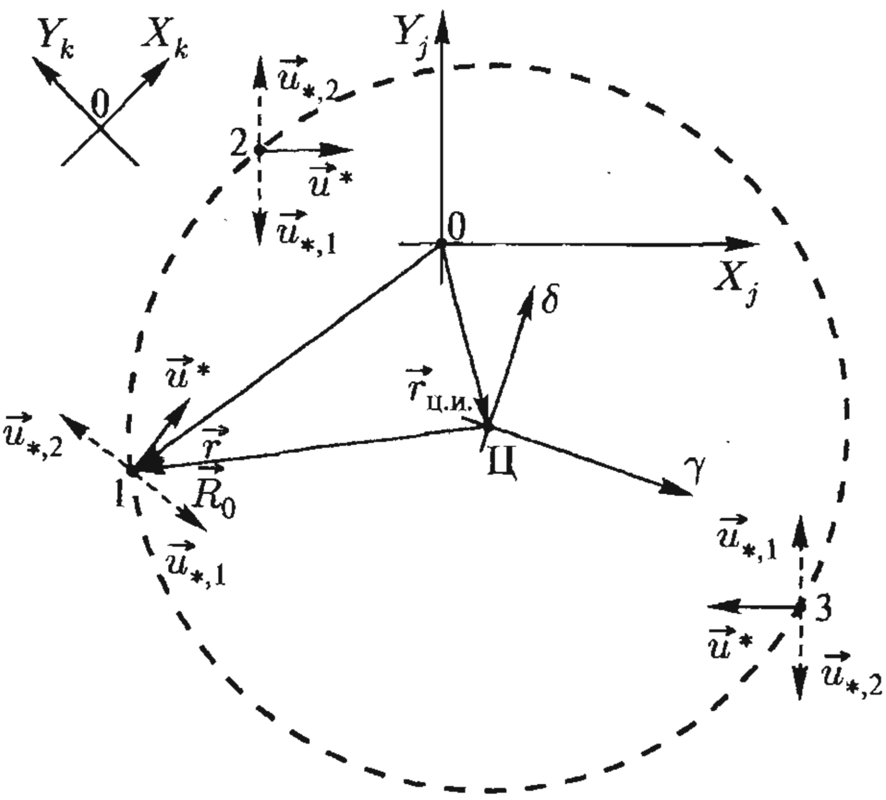


Рис. 4. Вращение точечной свободной частицы в глазах двух наблюдателей. Оси координат X_j, Y_j j-го наблюдателя и оси координат X_k и Y_k k-го наблюдателя расположены в той же плоскости $\{XY\}$, что и оси координат δ, γ Ц-наблюдателя. Оси Z_j, Z_k и ξ параллельны друг другу, перпендикулярны плоскости $\{XY\}$ и смотрят на читателя.

В точке 1 составляющая $\vec{u}^*$ собственно-орбитальной скорости представляется j-му наблюдателю выражением

$$\vec{u}^* = \vec{e}_{x,j}\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_{y,j}\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right),$$

а составляющая $\vec{u}_*$ выражением

$$\vec{u}_* = \vec{e}_{x,j}\left(\pm\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_{y,j}\left(\pm\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right).$$

В результате на каждые два мгновения, что частица появляется в точке 1: в одно из мгновений $u_{0,x,j} = \sqrt{2}\varsigma$, $u_{0,y,j} = 0$; в другое из мгновений $u_{0,x,j} = 0$, $u_{0,y,j} = \sqrt{2}\varsigma$. В точке 2 в глазах j-го наблюдателя и в точке 1 в глазах k-го наблюдателя: $\vec{u}^* = \vec{e}_x \cdot \varsigma$; $\vec{u}_* = \vec{e}_y \cdot (\pm\varsigma)$. В результате на каждые два мгновения, что частица появляется, например, в точке 2: в одно из мгновений $u_{0,x,j} = \varsigma$, $u_{0,y,j} = \varsigma$; в другое из мгновений $u_{0,x,j} = \varsigma$, $u_{0,y,j} = -\varsigma$

частицы — то X-проекция собственно-орбитальной скорости равна $\sqrt{2}\varsigma$, а Y-проекция равна нулю, то — наоборот. Например, в глазах j-го наблюдателя в точке 1:

$$u_{0,x}(x_1, y_1, t) = \begin{cases} \sqrt{2}\varsigma \\ 0 \end{cases} \text{с равной вероятностью;}$$

$$u_{0,y}(x_1, y_1, t) = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2}\varsigma \end{cases} \text{с равной вероятностью.}$$

При этом

$$\begin{aligned} \left[u_0(x_1, y_1, t)\right]^2 &= \left[u_{0,x}(x_1, y_1, t)\right]^2 + \left[u_{0,y}(x_1, y_1, t)\right]^2 = \\ &= \begin{Bmatrix} 2\varsigma^2 + 0 \\ 0 + 2\varsigma^2 \end{Bmatrix} = 2\varsigma^2; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\left\langle u_{0,x}(x_1, y_1)\right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}; \tag{19, а}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left[u_{0,x}(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t} &= \left\langle \left[u^*_x(x_1, y_1) + u_{*x}(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t} = \\ &= \left\langle \left[u^*_x(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t} + \left\langle \left[u_{*x}(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t} + \\ &\quad + 2\left\langle u^*_x(x_1 \text{[illegible]} x_1, y_1)\right\rangle_{\Delta t} = \\ &= \left(\frac{\varsigma^2}{2}\right) + \left(\frac{\varsigma^2}{2}\right) + 0 = \varsigma^{2\ 8)}; \end{aligned} \tag{19, б}$$

$$\left\langle u_{0,y}(x_1, y_1)\right\rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}; \tag{19, в}$$

$$\left\langle \left[u_{0,y}(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2. \tag{19, г}$$

Однако на орбите-окружности обязательно найдется точка, в которой — в моменты появления в ней частицы — имеют место другие соотношения. Так, если вести наблюдение из j-системы отсчета за точкой 2 или из k-системы за точкой 1, то по-прежнему справедливы соотношения (18), но, например, в точке 1 в глазах k-наблюдателя:

$$u_{0,x}(x_1, y_1, t) = \left\langle u_{0,x}(x_1, y_1)\right\rangle_{\Delta t} = \sqrt{\left\langle \left[u_{0,x}(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t}} = \varsigma; \tag{20}$$

$$u_{0,y}(x_1, y_1, t) = \pm\varsigma; \quad \left\langle u_{0,y}(x_1, y_1)\right\rangle_{\Delta t} = 0;$$
$$\left\langle \left[u_{0,y}(x_1, y_1)\right]^2\right\rangle_{\Delta t} = (\pm\varsigma)^2 = \varsigma^2.$$

[8] Поскольку $u_{*x}(x_1, y_1, t) = \pm\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\right)$, то $\langle u^*_x(x_1, y_1) \cdot u_{*x}(x_1, y_1)\rangle_{\Delta t} = 0$.

Подчеркнем, что в ***любой*** точке орбиты ***любой*** наблюдатель найдет, что

$$[u_0(x, y, t)]^2 = 2\varsigma^2;$$
$$\langle [u_{0,x}(x, y)]^2 \rangle_{\Delta t} = \langle [u_{0,y}(x, y)]^2 \rangle_{\Delta t} = \varsigma^2.$$

Тем не менее для практических целей одна из систем координат или одна из точек орбиты-окружности может оказаться гораздо предпочтительнее другой[9].

Одного из упомянутых выше наблюдателей, находящегося в центре собственно-орбитального круга (Ц-наблюдателя), допустимо называть привилегированным на том основании, что относительно него центр инерции частицы[10] выглядит только покоящимся. Чтобы отличить этого наблюдателя от всех остальных, ***его*** оси координат и были обозначены символами δ, γ, ξ. Оси всех остальных наблюдателей (как неподвижных, так и движущихся прямолинейно и равномерно относительно Ц-наблюдателя), обозначаются символами X_j, Y_j, Z_j; X_k, Y_k, Z_k и т. п.

В заключение замечу, что в реальном — трехмерном — пространстве найдется такая точка орбиты-сферы, для которой справедливы следующие равенства:

$$\langle u_{0,x}(x, y, z) \rangle_{\Delta t} = \langle u_{0,y}(x, y, z) \rangle_{\Delta t} = \langle u_{0,z}(x, y, z) \rangle_{\Delta t} = \frac{\varsigma}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом: $(\langle \vec{u}_0 \rangle_{\Delta t})^2 = \varsigma^2$, хотя $\langle \vec{u}_0^2 \rangle_{\Delta t} = 3\varsigma^2$.

3.3. Третья проблема

Согласно традиционному истолкованию частной теории относительности, если абсолютное значение скорости частицы точно равно ς, значит частица является безмассовой, движется прямолинейно и равномерно, и, стало быть, ее мгновенная скорость совпадает со средней по времени. Тем не менее читатель уже мог убедиться в том, что какой бы массой ни обладала частица, она не может существовать иначе, как вращаясь по собственной орбите со скоростью, равной $\sqrt{3}\varsigma$.

Можно показать на простом примере, что отсюда последует.

Допустим, что инерциальный наблюдатель следит именно за массивной частицей, перемещающейся вдоль X-оси. Допустим также, что

[9] Следует принять во внимание, что выбор системы координат для описания физической реальности всегда диктовался исключительно соображениями удобства описания и (или) практической пользы.

[10] Это и есть центр собственно-орбитального круга.

частица всякий раз попадает в поле зрения наблюдателя только в тех точках X-оси, в которых значение X-проекции ***мгновенной*** скорости частицы как раз и равно точно ς. Следует иметь в виду, что, поскольку частица участвует в ***собственном*** вращении, упомянутое значение скорости другим быть и не может. Однако перемещаться ***вдоль*** X***-оси массивная*** частица с такой скоростью также не может. Значение скорости ее перемещения вдоль X-оси обязано совпадать со значением скорости ее центра инерции ($V_{x,\text{ц.и.}}$), а $V_{x,\text{ц.и.}} = \dfrac{P_x}{m}$, причем величина $\dfrac{P_x}{m}$ может быть любой в пределах $0 \leqslant \dfrac{P_x}{m} < \varsigma$, но не может быть равной ς точно. Это вполне понятно, ибо скорость, равная $\dfrac{P_x}{m}$, центру инерции была попросту приписана (исходя, правда, из совершенно разумных соображений).

Наконец, начинает вырисовываться проблема. Ведь X-проекция скорости центра инерции частицы должна быть функцией X-проекции скорости самой частицы, а только что было подчеркнуто, что значение этой проекции скорости в описываемой ситуации точно равно ς. Следовательно, еще предстоит выяснить, существует ли такое физически содержательное определение X-проекции скорости центра инерции вращающейся частицы, чтобы значение $V_{x,\text{ц.и.}}$ совпало с величиной $\dfrac{P_x}{m}$, пока что центру инерции просто приписанной. Иными словами, предстоит найти вид зависимости величины $V_{x,\text{ц.и.}}$ от величины $V_{\text{частицы},x} (\equiv u_x)$.

Отождествим себя с таким (j-м) наблюдателем, ось X_j которого совпадает с осью γ (рис. 5)[11]. Легко проверить, что на плоскости $\{XY\}$ обязательно найдется точка, в которой — в моменты появления в ней частицы — j-наблюдатель будет видеть ее обладающей скоростью $\vec{u}$ такой, что:

$$u_x(t) = \langle u_x \rangle_{\Delta t} = \varsigma;$$
$$u_y(t) = \pm\varsigma; \quad \langle u_y \rangle_{\Delta t} = 0.$$

Заметим, что еще в одной точке плоскости $\{XY\}$ — в противоположной точке орбиты-окружности — в моменты появления в ней частицы имеют место соотношения

$$u_x(t) = \langle u_x \rangle_{\Delta t} = -\varsigma;$$
$$u_y(t) = \pm\varsigma; \quad \langle u_y \rangle_{\Delta t} = 0.$$

[11] Это сделано с целью избежать в дальнейшем появления громоздких выражений.

Конечно, ***заведомо*** считая частицу только вращающейся, достаточно вести наблюдение за одной точкой орбиты. Однако если необходимо выяснить, участвует ли частица также и в прямолинейном равномерном движении относительно j-наблюдателя, нужно следить за ***двумя*** точками орбиты, расположенными на одном диаметре.

Теперь подчеркнем, что ***все*** точки орбиты-окружности физически абсолютно идентичны. Поэтому любой наблюдатель вправе утверждать, что в любой момент вечности видит частицу присутствующей с равной вероятностью в любой точке окружности. Но раз так, то для некоторых чисто практических целей j-наблюдатель может позволить себе наблюдать частицу ***всегда только*** в тех точках плоскости $\{XY\}$, в которых

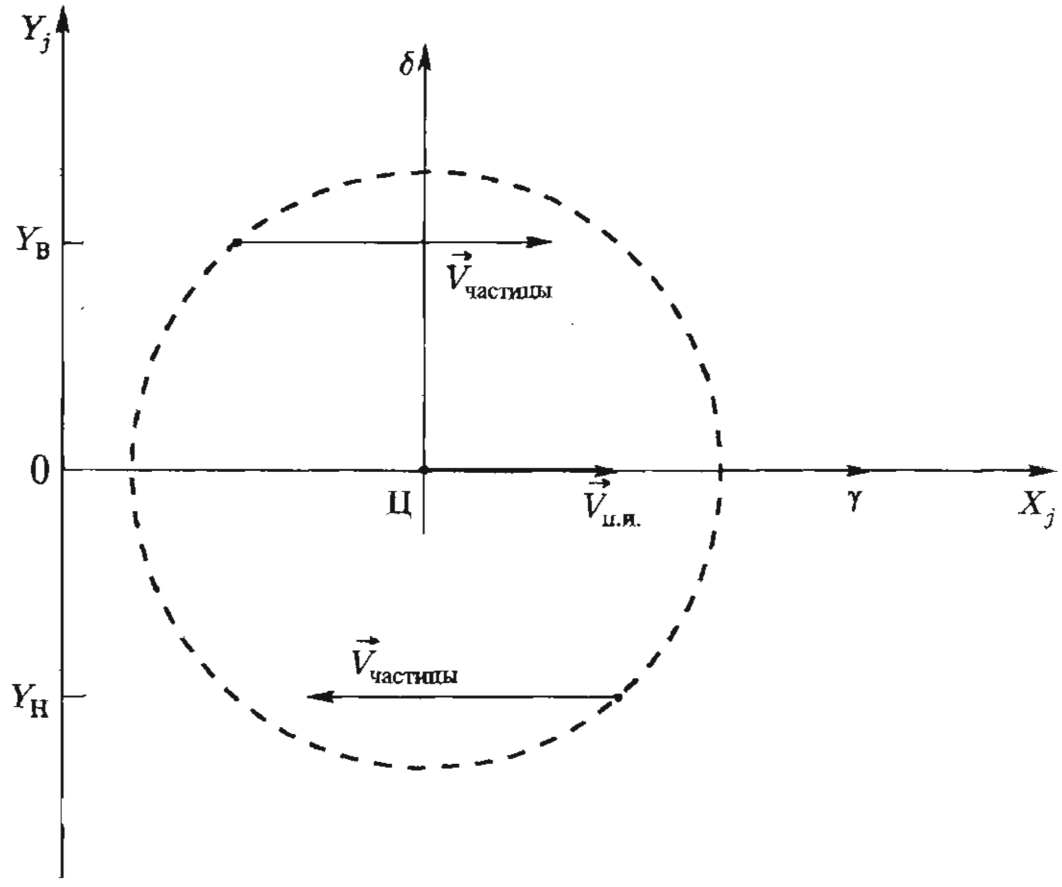


Рис. 5. Прямолинейное и равномерное перемещение собственно-орбитального круга вдоль X_j-оси.

Во всех точках линий $Y_j = Y_в$ и $Y_j = Y_н$ модуль X-проекции собственно-орбитальной скорости частицы $(u_{0,x})$ совпадает с модулем X-проекции ее результирующей скорости (u_x) несмотря на участие частицы еще и в прямолинейном равномерном движении вдоль X_j-оси со скоростью, равной $\vec{V}_{ц.и.} = \left(\frac{\vec{p}}{m}\right)$. Таким образом:

$$\vec{V}_{частицы}(Y_в) = \vec{e}_x \cdot u_x(Y_в) = \vec{e}_x \cdot u_{0,x}(Y_в) = \vec{e}_x \cdot ç;$$

$$\vec{V}_{частицы}(Y_н) = \vec{e}_x \cdot u_x(Y_н) = \vec{e}_x \cdot u_{0,x}(Y_н) = \vec{e}_x \cdot (-ç)$$

$$\langle u_x \rangle_{\Delta t} = u_x(t) = \begin{cases} \text{либо } +\varsigma, \\ \text{либо } -\varsigma, \end{cases} \tag{21, а}$$

$$u_y(t) = \pm\varsigma, \quad \langle u_y \rangle_{\Delta t} = 0. \tag{21, б, в}$$

Таким образом, если центр собственно-орбитального круга покоится относительно j-наблюдателя, последний в любой момент времени найдет две точки плоскости $\{XY\}$, в которых имеют место именно соотношения (21, а, б).

Если центр орбитального круга движется относительно j-наблюдателя вдоль некоторой прямой, то на плоскости $\{XY\}$ найдутся уже две ***линии***, в каждой точке которых соотношения (21, а, б) также имеют место в любой момент времени.

Пусть центр орбитального круга (центр инерции точечной частицы) движется вдоль X_j-оси (рис. 5) прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{V}_{\text{ц.и.}}$, равной $\vec{V}_{\text{ц.и.}} = \vec{e}_x \cdot \left(\dfrac{P}{m}\right)$ причем $0 < \left(\dfrac{P}{m}\right) < \varsigma$.

Предоставим j-наблюдателю право опираться на соотношения (21, а, б) и считать, что значение скорости частицы в точках одной прямой линии ($Y_j = Y_{\text{в}}$) равно

$$u_x(Y_{\text{в}}) = u_{0,x}(Y_{\text{в}}) = \varsigma, \tag{22, а}$$

а в точках другой прямой линии ($Y_j = Y_{\text{н}} = -Y_{\text{в}}$)

$$u_x(Y_{\text{н}}) = u_{0,x}(Y_{\text{н}}) = -\varsigma. \tag{22, б}$$

Воспользуемся ***кинематическим*** определением величины $V_{\text{ц.и.}}$, для чего введем представление об исчезающе коротком, но ***не равном нулю точно***, промежутке времени (τ), в течение которого частица движется прямолинейно внутри исчезающе малого, но ***не равного нулю точно***, пространственного интервала (Δl).

Если вращающаяся вокруг своего центра инерции частица еще и движется прямолинейно вдоль X-оси (например, вправо), наблюдатель будет чаще видеть частицу обладающей скоростью $u_x\,(Y_B)$ (равной $+\varsigma$), нежели скоростью $u_x\,(Y_H)$ (равной $-\varsigma$). В этом случае усредненная по времени скорость частицы равна

$$\langle u_x \rangle_{\Delta t = (\tau_B + \tau_H)} = \frac{u_x\,(Y_B) \cdot \tau_B + u_x\,(Y_H) \cdot \tau_H}{\tau_B + \tau_H} = \varsigma \cdot \frac{\frac{\tau_B}{\tau_H} - 1}{\frac{\tau_B}{\tau_H} + 1}. \tag{23}$$

Именно величина $\langle u_x \rangle_{\Delta t}$ переадресовывается центру инерции (центру круга на рис. 5), так что

$$V_{\text{ц.и.},\,x} \equiv \langle u_x \rangle_{\Delta t} = \varsigma \cdot \frac{\frac{\tau_B}{\tau_H} - 1}{\frac{\tau_B}{\tau_H} + 1}. \tag{24}$$

Здесь индексы «B» и «H» означают принадлежность соответствующей величины либо к верхней, либо к нижней линии, в точках каждой из которых j-й наблюдатель видит частицу.

Остается выяснить, чему равно отношение $\frac{\tau_B}{\tau_H}$. В связи с этим необходимо иметь в виду, что не только величины m и $\vec{u}$ являются характеристиками непосредственно частицы. Импульс $\vec{P}$, на самом деле, — это импульс тоже частицы и лишь переадресовывается ее центру инерции. Поэтому вполне разумно допустить, что в рассматриваемом случае

$$\frac{\tau_B}{\tau_H} = \frac{1 + \frac{|P_x|}{m \cdot c}}{1 - \frac{|P_x|}{m \cdot c}}. \tag{25}$$

При этом ничто не мешает считать, что $\tau_B \to 0$; $\tau_H \to 0$. Таким образом, из выражений (23) и (25) следует, что

$$V_{\text{ц.и.}, x} = \frac{P_x}{m}. \tag{26}$$

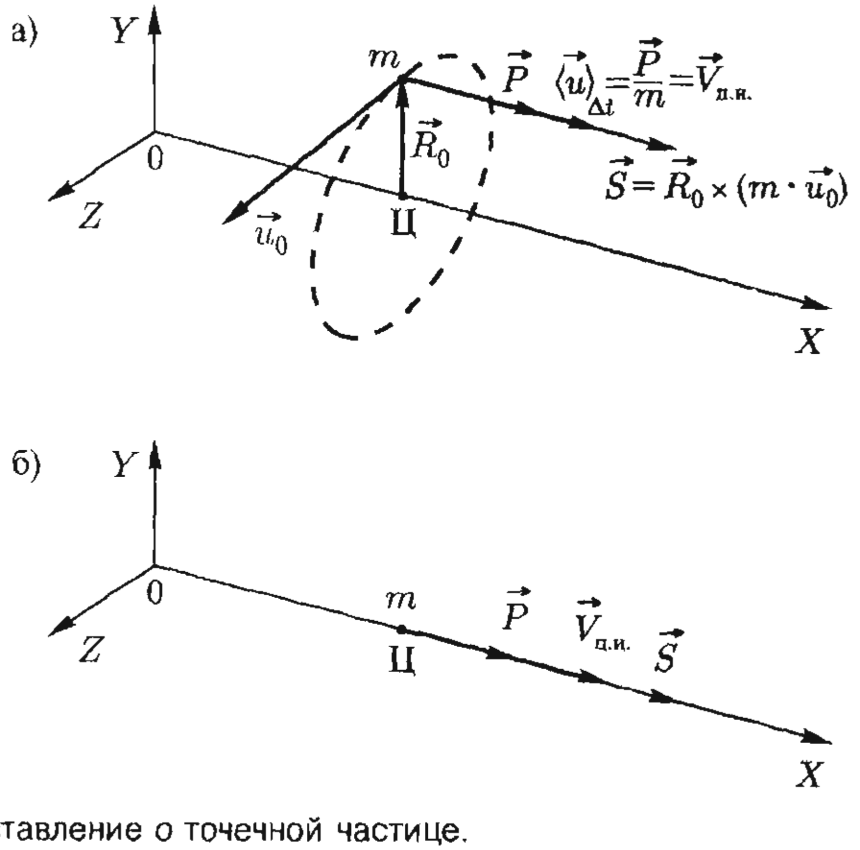


Рис. 6. Представление о точечной частице.

а) Представление, в котором носителем всех своих характеристик является сама частица.

б) Представление, в котором носителем всех характеристик частицы считается ее центр инерции. В этом представлении обладание спином выглядит действительно крайне загадочным

В заключение отметим, что ***все*** характеристики точечной частицы, кроме, конечно, величин $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$, можно переадресовать ее центру инерции, ***в том числе и спин*** (рис. 6). Естественно, что именно обладание спином покажется загадочным свойством точечной частицы, если отождествить с нею ее же центр инерции.

3.4. Теория относительности и спин

Пора подвести некоторые итоги.

Исследование знаменитого эйнштейновского соотношения между энергией, импульсом и массой покоя свободной точечной частицы привело к следующим выводам.

1. Точечная частица, к какой бы разновидности она ни принадлежала (какой бы массой она ни обладала), не может существовать иначе, как вращаясь по собственной орбите конечного ненулевого радиуса.
2. Центр собственной орбиты выполняет функции центра инерции точечной частицы, и ему могут быть переадресованы абсолютно все характеристики частицы (включая спин).
3. Собственно-орбитальную скорость частицы необходимо признать самостоятельным (неопределяемым) понятием и приписать ее абсолютному значению величину в корень из трех раз большую, чем скорость света в пустом пространстве. Численное значение каждой из проекций собственно-орбитальной скорости на оси координат при этом точно равно численному значению скорости света.
4. Если описывать вращение точечной частицы по поверхности собственно-орбитальной сферы не прибегая к использованию понятия ускорение, придется считать только одну из трех проекций вектора собственно-орбитальной скорости определенной точно: и по модулю, и по направлению (две другие проекции придется считать определенными только по модулю). Это же касается и собственно-орбитального импульса частицы, поскольку он не является самостоятельным понятием, а пропорционален собственно-орбитальной скорости[12].

[12] Следует обратить внимание на принципиальное различие определений двух величин: $\vec{V}_{\text{ц.и.}}$ и $\vec{P}_0$. Скорость центра инерции ($\vec{V}_{\text{ц.и.}}$) является производным понятием, а импульс $\vec{P}$ и масса частицы m $\left(= m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot c}\right)^2}\right)$ исходными понятиями: $\vec{V}_{\text{ц.и.}} = \frac{\vec{P}}{m}$.

5. Признавая точно определенной лишь одну проекцию вектора собственно-орбитальной скорости, автоматически приходится признавать точно определенной также лишь одну из трех проекций радиус-вектора точки собственно-орбитальной сферы.
6. Точечная частица обладает собственным механическим моментом (спином), абсолютное значение которого оказывается одинаковым для любого инерциального наблюдателя[13)].

3.5. Самая сложная проблема

Напоследок, пожалуй, самая сложная проблема — перехода от ***описания*** явления к ***объяснению*** явления.

Столь нетрадиционный способ описания вращения, который был предложен в п. 3.1, понадобился потому, что свободной частице приходится вращаться именно в пустом пространстве, в каковом, согласно традиционному представлению о пустоте, не может находиться никакого материального объекта (ни точечного, ни ***континуального***). А ведь только такой объект мог бы притягивать к себе вращающуюся частицу.

Но хотя придуманный в п. 3.1 способ позволил описать вращение и таким образом объяснить спин частицы, не пользуясь понятиями ускорения и силы, сверхзагадочным стало выглядеть существование собственной стационарной орбиты. Ведь физическая содержательность ***этого*** понятия полностью опирается на понятия силы и ускорения. Выход из положения представляется единственным — предположить, что пустое пространство устроено не так, как всегда считалось в рамках «классической» (то есть, еще доквантовой) механики.

Вот пример нетрадиционной «конструкции» пустого пространства.

Все бесконечно протяженное пространство заполнено флуктуирующим (***хаотически*** колеблющимся) как в пространстве, так и во времени электромагнитным полем. И пространственный, и временной «периоды» колебаний напряженности поля исчезающе малы. Отсюда

Собственно-орбитальный импульс $\vec{P}_0$ является производным понятием, а собственно-орбитальная скорость $(\vec{u}_\perp)$ и масса m являются исходными понятиями: $\vec{P}_0 = m \cdot \vec{u}_\perp$. Модуль импульса $\vec{P}_0$ в реальном — трехмерном — случае равен: $\left|\vec{P}_0\right| = \sqrt{3}m\,(P) \cdot ç$.

[13)] Следует принять во внимание, что в рамках традиционного варианта частной теории относительности частица считается принципиально не участвующей в собственном вращении (из-за чего спин и считается загадочным понятием). Поэтому бесполезно искать в анналах упомянутой теории выражение $R_0 \cdot m = \mathrm{Inv}$, которое, в свою очередь, привело бы к выражению для абсолютного значения радиуса собственной орбиты.

следует, что пространство представляет собой еще и ***сплошную*** среду, ***электронейтральную лишь в среднем***.

Стоит обратить внимание на несколько особенностей предложенной «конструкции» пространства (отныне отождествляемого с материальным континуумом — сплошной средой)[14].

1. В любой точке пространства плотность распределенного электрического заряда, будучи усредненной по сколь угодно малому, но ***отличному от нуля*** промежутку времени, одинакова и равна нулю.

2. В любой момент вечности плотность распределенного электрического заряда, будучи усредненной по сколь угодно малому, но ***отличному от нуля*** объему пространства, одинакова и равна нулю.

3. Сказанное выше в пп. 1, 2 справедливо и в отношении векторов напряженностей электрического и магнитного полей, хотя среднее значение модуля каждого вектора отлично от нуля[15].

4. Несмотря на то, что области пространства конечных размеров могут быть в течение некоторых промежутков времени электрически заряжены, внутри этих областей ***не существует частиц — носителей зарядов***[16]. В подобную сплошную среду можно вставить без сопротивления любой материальный объект.

5. Если, согласно традиционной точке зрения, отождествить флуктуирующее электромагнитное поле с фотонным газом (газом «виртуальных» фотонов), нетрудно сообразить, что флуктуации объемной плотности заряда, распределенного в пространстве, и флуктуации объемной плотности энергии фотонного газа будут сопутствовать друг другу. При этом непрерывному возрастанию заряда определенного знака в некоторой области пространства воспрепятствует возникающий

[14] Описываемая далее конструкция сегодня уже не может считаться полностью оригинальной.

[15] То есть флуктуирует не только модуль вектора, но и его направление, из-за чего среднее значение вектора равно нулю, а среднее значение квадрата вектора оказывается отличным от нуля.

[16] Искушенному читателю имеет смысл принять во внимание два обстоятельства.

1. В не обладающем сферической симметрией пространственно неоднородном электрическом поле напряженностью $\vec{\mathrm{E}}$ возникает распределенный электрический заряд объемной плотности ρ. Величины $\vec{\mathrm{E}}$ и ρ связаны уравнением Даламбера:

$$\rho = \vartheta_0 \cdot \operatorname{div} \vec{\mathrm{E}} - \frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где ϑ_0 — электрическая постоянная «пустого» пространства, $\vec{\mathrm{E}} = -\operatorname{grad} \varphi$.

2. Изменение объемной плотности заряда во времени сопровождается в любой точке пространства электрическим током плотностью $\vec{J}$: $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

там же электрический ток[17], а непрерывному сжатию (или расширению) фотонного газа в некоторой области пространства воспрепятствует возникающий там же поток, обусловленный разностью давлений.

Таким образом точечная, заряженная, вращающаяся по собственной орбите частица, даже будучи одним-единственным материальным объектом в пустом пространстве, не может считаться свободной в традиционном смысле слова, ибо пространство допустимо считать пустым только в кавычках. Упомянутая частица взаимодействует с «пустым» пространством как «электростатически», поляризуя его своим зарядом, так и «электродинамически», излучая и поглощая свет (электромагнитное поле). Не может ли тогда оказаться так, чтобы в результате взаимодействия с «пустым» пространством, например, точечного электрона распределение пространственного заряда континуума внутри собственно-орбитальной сферы электрона приобрело вид, показанный на рис. 7? Что же касается самого точечного электрона, то, поскольку в любой момент времени он с равной вероятностью присутствует в любой точке сферы, его заряд кажется размазанным по ее поверхности. В результате оказывается, что не только ***модуль*** вектора результирующего (флуктуирующего во времени) электрического поля, но уже сам вектор ***в среднем по времени отличен от нуля в каждой точке пространства и внутри собственно-орбитальной сферы, и вне ее.*** Именно этот вектор и следует называть ***электростатическим*** полем, созданным точечной заряженной частицей.

На рис. 8 представлен график зависимости значения модуля вектора напряженности усредненного по времени результирующего электростатического поля $\vec{E}$ от расстояния от центра собственно-орбитальной сферы (зависимости, соответствующей распределению заряда, представленному на рис. 7).

Из рис. 7 следует, что электрон притягивается к центру своей орбитальной сферы с силой $\vec{F}_{\text{цс}}$, значение которой можно вычислить, руководствуясь следующими соображениями.

С одной стороны значение силы $\vec{F}_{\text{цс}}$, поддерживающей вращение точечной заряженной частицы, должно быть равно

$$F_{\text{цс}} = m \cdot \left(\frac{u_0^2}{R_0}\right), \tag{27}$$

где $\left(\dfrac{u_0^2}{R_0}\right)$ и есть значение центростремительного ускорения.

---

[17] Этот ток представляет собой перемещение (расширение-сжатие) электрически заряженных областей сплошной среды, а не частиц.

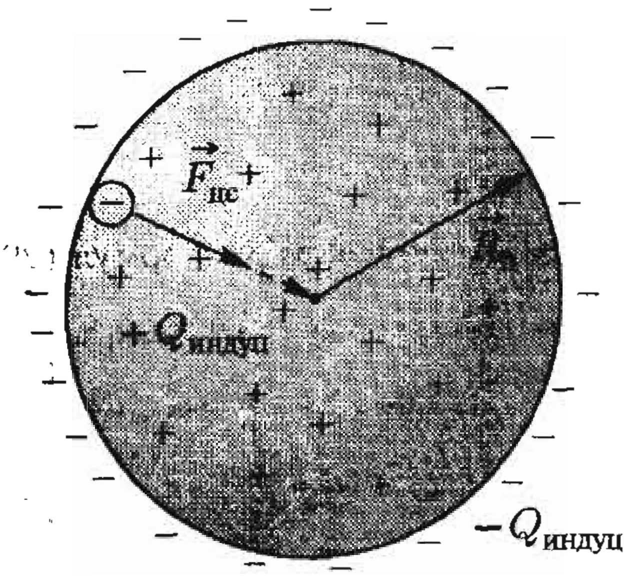


Рис. 7. Распределение среднего по времени пространственного (континуального) электрического заряда в пределах собственно-орбитальной сферы электрона. Положительный заряд распределен по объему пространства внутри сферы, а отрицательный — в исчезающе тонком слое, прилегающем снаружи к поверхности сферы

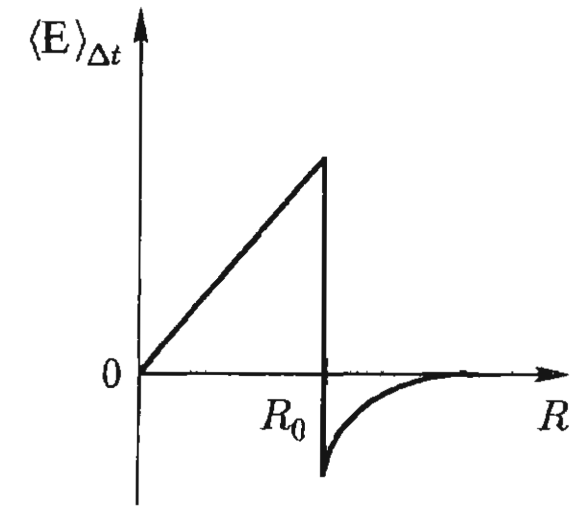


Рис. 8. График зависимости значения напряженности электрического поля от расстояния от центра собственно-орбитальной сферы. За ее пределами имеет место закон Кулона:

$$\langle E \rangle_{\Delta t} = \left(\frac{Q_{частицы}}{4\pi \cdot \vartheta_0 \cdot R^2} \right)$$

при $R > R_0$

С другой стороны значение центростремительной силы притяжения частицы к индуцированному ею же заряду, согласно закону Кулона, равно:

$$F_{цс} = \left\{ \frac{Q_{индуц} \cdot Q_{частицы}}{4\pi\vartheta_0 \cdot R_0^2} \right\}, \tag{28}$$

где ϑ_0 ($= 8{,}86 \cdot 10^{-14}$ Ф/см $= 5{,}54 \cdot 10^5$ э/В $\cdot$ см) — электрическая постоянная «пустого» пространства; R_0 — значение радиуса собственно-орбитальной сферы.

Из равенств (27) и (28) можно найти величину того индуцированного заряда, который и удерживает частицу на собственной орбите:

$$\left|Q_{индуц}\right| = \left|Q_{частицы}\right| \cdot \frac{4\pi\vartheta_0 \cdot u_0^2 \cdot m \cdot R_0}{Q^2_{частицы}}. \tag{29}$$

Значение радиуса R_0 можно вычислить по формуле (11, в), исходя из достоверно установленного абсолютного значения спина (S) точечной частицы, равного $\sqrt{3} \cdot \frac{\hbar}{2}$ ($\hbar = 0{,}66 \cdot 10^{-15}$ эВс — постоянная Планка), или значения проекции спина на какую-либо из осей координат, равного $\frac{\hbar}{2}$. В результате получаем, что

$$R_0 = \frac{S_\xi \cdot \sqrt{3}}{m_0 \cdot \varsigma} = \frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m_0 \cdot \varsigma}. \tag{30}$$

Подставляя в качестве u_0 величину $\sqrt{3}\varsigma$, получаем из формул (29) и (30):

$$|Q_{\text{индуц}}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot |Q_{\text{частицы}}| \cdot \frac{1}{\&}, \tag{31}$$

где

$$\& \equiv \frac{Q^2_{\text{частицы}}}{4\pi \cdot \vartheta_0 \cdot \hbar \cdot \varsigma}. \tag{32}$$

Если в качестве заряда частицы принять значение заряда электрона, то $\& \approx \frac{1}{137}$ (это очень знаменитая «постоянная тонкой структуры»); $Q_{\text{индуц}} \approx 355{,}5$ электрона[18].

Заметим, что в каких бы движениях ни участвовал центр инерции точечной заряженной частицы (вращающейся по собственной орбите), повсюду частицу будут сопровождать непрерывно индуцируемые ею внутриорбитальный и приорбитальный заряды.

Отметим также, что электростатическое поле[19], автоматически возникшее в пространстве с появлением в нем ***точечной*** вращающейся частицы, ***нигде не равно бесконечности.*** Энергию, содержащуюся в этом поле ($E_{\text{поля}}$), можно вычислить, пользуясь общепринятым в электростатике соотношением

$$E_{\text{поля}}(Q) = \left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \cdot \int\limits_0^\infty \mathrm{E}^2(Q, R) \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot dR.$$

Заметим, что напряженность поля, созданного зарядами $+Q_{\text{индуц}}$ и $-Q_{\text{индуц}}$, в пространстве вне сферы будет равна нулю. Далее, если допустить, что плотность (ρ) распределенного внутри орбитальной сферы индуцированного заряда не зависит от R, то естественно, что $\rho = \frac{Q_{\text{индуц}}}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3}$, а тогда при $R < R_0$:

$$\mathrm{E}(\rho, R) = \frac{\rho \cdot R}{3\vartheta_0} = \frac{Q_{\text{индуц}} \cdot R}{4\pi \cdot \vartheta_0 \cdot (R_0^3)},$$

[18] Следует помнить, что индуцированный заряд не создан точечными заряженными частицами, а представляет собой заряженную сплошную среду.

[19] Поле содержит электростатическую составляющую, если в среднем по времени поле отлично от нуля.

и

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{индуц}}) = \frac{\vartheta_0}{2} \cdot \int\limits_0^{R_0} \mathrm{E}^2(\rho, R) \cdot 4\pi \cdot R^2 dR = \frac{9\sqrt{3} \cdot m_0 \cdot ç^2}{20\,\&}.$$

Энергия поля, созданного самой частицей (заряд которой справедливо считать в среднем по времени размазанным по поверхности сферы радиуса R_0), внутри сферы равна нулю, а вне сферы равна

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{частицы}}) = \frac{\vartheta_0}{2} \cdot \int\limits_{R_0}^{\infty} \left(\frac{Q_{\text{частицы}}}{4\pi \cdot \vartheta_0 \cdot R^2} \right)^2 \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot dR = \frac{\& \cdot m_0 \cdot ç^2}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом энергия внеорбитального электростатического поля, порожденного такой точечной заряженной частицей, как, например, электрон, составляет очень малую долю его кинетической энергии вращения — бывшей энергии «покоя»[20]:

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{электрона}}) = \frac{\& \cdot m_0 \cdot ç^2}{\sqrt{3}} \approx \frac{m_0 \cdot ç^2}{250}.$$

Итак, читатель ознакомлен с совершенно новым и, как кажется автору, физически содержательным (то есть понятным) представлением о состоянии, в котором только и может пребывать точечная свободная частица. Тем не менее в физике любую теорию, вне зависимости от ее логической убедительности, необходимо проверять экспериментом.

В гл. 4 на суд читателей будет вынесен не совсем обычный способ проверки на соответствие реальности новых представлений о спине точечной частицы.

[20] Искушенному читателю стоит обратить внимание на то, что не возникает более проблемы «расходимости собственной энергии» точечной заряженной частицы — проблемы, столь беспокоящей физику уже много десятилетий.

Глава 4
Уравнение Дирака

4.1. Суть дела

Имеется в виду вместо традиционного обращения к эксперименту апеллировать к хорошо известному уравнению, описывающему состояние точечной свободной частицы. Это уравнение, предложенное давным-давно Полем Дираком, признано истинным, поскольку выдержало все мыслимые проверки. Особым же уважением оно пользуется благодаря тому, что ***из него***, как принято говорить, следует:

а) *существование не только частиц, но и античастиц*;

б) *необходимость приписать точечной частице спин.*

Чтобы стала понятной сущность предлагаемого автором способа проверки, читателю необходимо обратить внимание на витиеватый оборот: «*из уравнения Дирака следует необходимость приписать точечной частице спин*».

Что в самом деле понимает мировая научная общественность под этим утверждением?

Если то, что частица вращается по собственной орбите радиуса, равного $\frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m(P)\cdot ç}$, со скоростью, равной $\sqrt{3}ç$, тогда и проверять нечего. Но это означало бы, что автор ничего нового в представления о спине не внес, и в лучшем случае лишь изложил своими словами давно известное и хорошо понятое.

Разобраться во всем сказанном вполне возможно, даже не имея специального физического образования. Но для этого, хотя и неглубоко, а все же придется погрузиться в математику. Тем не менее, если читатель не испытывает перед подобной необходимостью мистического трепета, он может быть уверен, что никаких проблем с пониманием не возникнет. Все, что от него потребуется, это — отличать логичные рассуждения от нелогичных.

Первое, что нужно сделать, это проанализировать общепринятое утверждение, согласно которому из уравнения Дирака следует, что *«орбитальный механический момент свободной точечной частицы* *не сохраняется, а сохраняется лишь сумма орбитального и некоторого дополнительного момента — спина»* [1].

Вот это — уже отнюдь не витиеватое, а вполне содержательное утверждение. Его действительно *можно* анализировать, и я собираюсь доказать, что взятое в кавычки — это и есть вообще все, что было *когда-либо установлено.* Но, обратите внимание: удовлетвориться приведенным утверждением — значит отказаться от физически содержательного определения упомянутого «дополнительного момента». К сожалению, так и произошло. Вот, почему понятие о спине точечной частицы, бывшее парадоксальным до Дирака, таковым и осталось.

Итак на очереди анализ общепринятого утверждения.

Уравнение Дирака относится к числу уравнений состояния точечной частицы, которые обычно записывают в виде

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi(x,y,z,t)}{\partial t} = \widehat{H}\Psi(x,y,z,t), \tag{33}$$

где $i \equiv \sqrt{-1}$; $\hbar$ — постоянная Планка; $\widehat{H}$ — оператор, называемый гамильтонианом.

Читателю нет необходимости задумываться над тем, что представляет собой физическая величина, обозначенная символом Ψ. Пусть она останется просто функцией координат (x, y, z) точки пространства (в которой присутствует частица) и момента времени t (существования частицы). Вид зависимости Ψ от x, y, z, t находят, решив операторное уравнение (33) с соответствующими начальным и граничными условиями. Зная Ψ-функцию, можно вычислить либо мгновенно-локальное, либо так называемое «квантовое среднее» значение любой физической характеристики частицы.

Что касается оператора $(\widehat{H})$, то это — простое математическое понятие. Действие оператора $\widehat{H}$ (крышечка $\widehat{\ }$ призвана свидетельствовать, что перед нами именно оператор) на Ψ-функцию отображается записью $\widehat{H}\Psi$, причем отсутствие знака умножения (« · ») между $\widehat{H}$ и Ψ как раз и означает, что имеет место операция, в результате которой Ψ-функция превращается в другую — f-функцию: $\widehat{H}\Psi(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)$.

---

[1] Приведена цитата из статьи: *Дирака уравнение* // Энциклопедия «Физика микромира». М.: Советская энциклопедия, 1980, с. 157. Я лишь рискнул заменить слово «электрон» словами «точечная частица» (поскольку заряд к спину никакого отношения не имеет, а считается электрон частицей точечной) и термин «момент количества движения» термином «механический момент».

* * *

В роли операторов могут выступать самые разнообразные математические конструкции, например:

$$\widehat{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Операция $\widehat{D}\Psi$ при условии, что $\Psi = \Psi(x, y, z)$, означает следующее:

$$\widehat{D}\Psi = f = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

Пусть $\Psi = x \cdot y^3 \cdot z^5$. Тогда

$$\widehat{D}\Psi = f = 6x \cdot y \cdot z^5 + 20x \cdot y^3 \cdot z^3.$$

В роли оператора может выступать также и сама независимая переменная — аргумент Ψ-функции. Например, $\Psi(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$, а оператором «назначена» величина x, что отражают с помощью тождества $\widehat{x} \equiv x$. Тогда операция $\widehat{x}\Psi$ означает умножение x на Ψ:

$$\widehat{x}\Psi = x \cdot \Psi = f = x^2 \cdot y \cdot z.$$

При обращении с операторами необходимо учитывать одну важную особенность. Пусть $\Psi(x) = x^2$, а в роли операторов выступают величины x и $\frac{d}{dx}$. Из них можно образовать еще два оператора $\widehat{\Pi}_1$ и $\widehat{\Pi}_2$ таких, что

$$\widehat{\Pi}_1 = x \cdot \left(\frac{d}{dx}\right); \quad \widehat{\Pi}_2 = \left(\frac{d}{dx}\right) x.$$

Тогда

$$\widehat{\Pi}_1\Psi = \left(x \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)\right) x^2 = x \cdot \left(\frac{dx^2}{dx}\right) = 2x^2;$$

$$\widehat{\Pi}_2\Psi = \left(\left(\frac{d}{dx}\right) x\right) x^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)(x \cdot x^2) = \left(\frac{dx^3}{dx}\right) = 3x^2.$$

Таким образом:

$$\left(x \cdot \left(\frac{d}{dx}\right) - \left(\frac{d}{dx}\right) x\right) \Psi = 2x^2 - 3x^2 = -x^2 \neq 0.$$

Отсюда делают вывод, что $\left(x \cdot \left(\frac{d}{dx}\right) - \left(\frac{d}{dx}\right) x\right) \neq 0.$

Два оператора $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ называются:

коммутирующими, если $(\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_2\widehat{\mu}_1)\,\Psi = 0$, *и тогда*

$$\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_2\widehat{\mu}_1 = 0;$$

некоммутирующими, если $\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_2\widehat{\mu}_1 \neq 0$;

антикоммутирующими, если $(\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 + \widehat{\mu}_2\widehat{\mu}_1)\,\Psi = 0$, *и тогда*

$$\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 + \widehat{\mu}_2\widehat{\mu}_1 = 0.$$

* * *

Физической частью задачи описания состояния частицы в реальной или придуманной ситуации как раз и является установление явного вида оператора $\widehat{H}$. После этого остается решить чаще всего несложное дифференциальное уравнение. Однако читателю не придется ломать голову ни над тем, ни над другим. Достаточно будет принять к сведению, что: а) существует способ, позволяющий ставить в соответствие любой физической характеристике (полной энергии, импульсу, механическому моменту, ...) оператор, способный действовать на Ψ-функцию; б) существует формула, позволяющая найти оператор величины, являющейся производной по времени от другой величины, если известны оператор этой последней и оператор $\widehat{H}$, фигурирующий в уравнении состояния (33).

Обратимся к оператору $\left(\widehat{\vec{L}}\right)$ механического момента, называемого орбитальным. Это векторный оператор, и его можно представить в виде

$$\widehat{\vec{L}} = \vec{e}_x \cdot \widehat{L}_x + \vec{e}_y \cdot \widehat{L}_y + \vec{e}_z \cdot \widehat{L}_z, \tag{34}$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ — орты выбранной системы координат, а операторы проекций орбитального механического момента имеют вид:

$$\widehat{L}_x = y \cdot \widehat{P}_z - z \cdot \widehat{P}_y; \quad \widehat{L}_y = z \cdot \widehat{P}_x - x \cdot \widehat{P}_z; \quad \widehat{L}_z = x \cdot \widehat{P}_y - y \cdot \widehat{P}_x \text{ [2]}.$$

[2] Возможно, читатель уже догадался, что в выражении для оператора $\widehat{\vec{L}}$ величины $\vec{r}$ и $\widehat{\vec{P}}$ — это радиус-вектор точки присутствия центра инерции точечной частицы (а не ее самой) и оператор импульса также ее центра инерции. Таким образом $\vec{L}$ — это механический момент чисто центра инерции. Механический момент самой частицы, естественно, равен сумме ее собственного (спина) и орбитального моментов. Этот полный момент $\vec{M}$ и может быть переадресован центру инерции.

Формула же, о которой идет речь, выглядит так:

$$\widehat{\left(\frac{dL_x}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\widehat{L}_x\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{L}_x\right). \qquad (35)$$

(Аналогичные формулы для $\widehat{\left(\frac{dL_y}{dt}\right)}$ и $\widehat{\left(\frac{dL_z}{dt}\right)}$.)

Если свойства операторов $\widehat{\vec{L}}$ и $\widehat{H}$ таковы, что

$$\left(\widehat{L}_x\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{L}_x\right) = \left(\widehat{L}_y\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{L}_y\right) = \left(\widehat{L}_z\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{L}_z\right) = 0,$$

значит $\widehat{\left(\frac{dL}{dt}\right)} = 0$, а тем самым и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, и стало быть орбитальный момент не меняется с течением времени (в процессе существования движущейся или, — что уже тривиально, — покоящейся частицы). Как уже говорилось в гл. 1 (см. рис. 2), хотя при произвольном выборе начала координат момент $\vec{L}$ точечной свободной (то есть, если и движущейся, то прямолинейно) частицы и выглядит отличным от нуля, тем не менее $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.

В додираковском уравнении состояния оператор $\widehat{H}$ имел вид:

$$\widehat{H} = \frac{(\widehat{\vec{P}})^2}{2m_0} \qquad (36)$$

(где $\widehat{\vec{P}} = -i \cdot \hbar \cdot \left\{\vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}$ — оператор $\vec{P}$-импульса частицы). В этом случае

$$\left(\widehat{L}_x\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{L}_x\right) = \ldots = 0,$$

стало быть $\widehat{\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)} = 0$. Это полностью соответствовало традиционным представлениям о единственно возможном характере движения точечной свободной частицы — прямолинейном и равномерном.

Но вот оператор-гамильтониан, фигурирующий в уравнении Дирака, не такой:

$$\widehat{H}_{\text{Д}} = \varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right), \qquad (37)$$

где $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ — новые операторы, впервые введенные Дираком.

Таким образом предложенное им уравнение выглядит следующим образом:

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)\Psi \tag{38}$$

или

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\varsigma \cdot \left\{\widehat{\alpha}_x \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \widehat{\alpha}_y \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \widehat{\alpha}_z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right\} - \frac{i \cdot m_0 \cdot \varsigma^2}{\hbar} \cdot \widehat{\beta}\Psi.$$

Необходимость столь сильно изменить вид гамильтониана вынудили Дирака, на самом деле, чисто математические обстоятельства. Сейчас нет смысла выяснять, в чем они состояли[3]. Сейчас достаточно принять к сведению, что, руководствуясь только чисто математическими соображениями, ***не имеющими никакого отношения ни к аничастицам, ни к спину***, Дирак ввел в гамильтониан операторы, соответствующие на момент введения неведомо каким физическим характеристикам, но наделил эти операторы и Ψ-функцию математическими свойствами, придающими содержательность операциям $\widehat{\vec{\alpha}}\Psi$ и $\widehat{\beta}\Psi$.

Однако в результате оказалось, что:

$$\widehat{\left(\frac{dL_x}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\widehat{L}_x\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}\widehat{L}_x\right) = \varsigma \cdot \left(\widehat{\alpha}_y\widehat{P}_z - \widehat{\alpha}_z\widehat{P}_y\right);$$

$$\widehat{\left(\frac{dL_z}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\widehat{L}_z\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}\widehat{L}_z\right) = \varsigma \cdot \left(\widehat{\alpha}_x\widehat{P}_y - \widehat{\alpha}_y\widehat{P}_x\right);$$

$$\widehat{\left(\frac{dL_y}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\widehat{L}_y\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}\widehat{L}_y\right) = \varsigma \cdot \left(\widehat{\alpha}_z\widehat{P}_x - \widehat{\alpha}_x\widehat{P}_z\right).$$

Следовательно, и $\widehat{\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)} \neq 0$, причем именно из-за присутствия в гамильтониане $\widehat{H}_{\text{Д}}$ оператора $\widehat{\vec{\alpha}}$.

Неравенство $\widehat{\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)} \neq 0$, а тем самым и неравенство $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right) \neq 0$, означает, что механический момент частицы меняется во времени. Но ведь речь-то идет о частице ***свободной***, — не подвергающейся никаким воздействиям. Стало быть, ни ее энергия, ни импульс, ни механический момент не могут изменяться во время ее движения (и существования). Вот потому и было предложено считать момент $\vec{L}$ лишь

[3] Это будет показано в гл. 6.

одной из двух составляющих полного и уже ***неизменного во времени*** момента $(\vec{M})$ частицы:

$$\vec{M} = \vec{L} + \vec{S}. \tag{39}$$

В этой формуле $\vec{S}$ и есть другая — «неорбитальная» составляющая полного механического момента $\vec{M}$.

Хотя внесенное предложение позволяет надеяться на то, что

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{M}}\widehat{H}_{Д} - \widehat{H}_{Д}\widehat{\vec{M}}\right) = 0,$$

еще предстоит выяснить, можно ли построить требуемый оператор $\widehat{\vec{S}}$, используя присутствующие в уравнении Дирака векторные операторы $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\vec{P}}$. Ведь, когда Дирак наделял свойствами оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$, то вовсе не с целью использовать его для конструирования оператора спина.

К счастью, оказалось, что, если постулировать — ***именно постулировать***, — что

$$\widehat{\vec{S}} = -\frac{i\cdot\hbar}{2}\cdot\left(\vec{e}_x\cdot\widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_z + \vec{e}_y\cdot\widehat{\alpha}_z\widehat{\alpha}_x + \vec{e}_z\cdot\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y\right), \tag{40}$$

то действительно

$$-\frac{i}{\hbar}\cdot\left\{\left(\widehat{\vec{L}} + \widehat{\vec{S}}\right)\widehat{H}_{Д} - \widehat{H}_{Д}\left(\widehat{\vec{L}} + \widehat{\vec{S}}\right)\right\} = \widehat{\left(\frac{d(\vec{L}+\vec{S})}{dt}\right)} = \widehat{\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)} = 0.$$

Вот это и называется «из уравнения Дирака следует необходимость приписать точечной частице спин $(\vec{S})$».

Я же собираюсь доказать, что уравнение Дирака описывает именно вращающуюся частицу, и отождествить величину $\widehat{\vec{S}}$, определенную выражением (40), с оператором спина можно ***только*** потому, что для точечной частицы (любой разновидности) радиус-вектор точки собственной орбиты, отсчитанный от ее центра, и собственно-орбитальный импульс ***порознь*** отличны от нуля, и при этом: $\widehat{R}_{0,x}\widehat{P}_{0,y} = -i\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y = \widehat{S}_z$.

Тем самым спин приобретает физически содержательное определение: это векторное произведение радиус-вектора точки собственной орбиты, в которой оказывается частица, на ее собственно-орбитальный импульс.

Итак, на очереди апелляция к уравнению Дирака.

4.2. Следует ли из уравнения Дирака соотношение $\widehat{S}_z = \widehat{R}_{0,x}\widehat{P}_{0,y}$?

Прежде всего, нужно вспомнить, что говорилось в гл. 3 о характере движения свободной точечной частицы, и выписать необходимые для дальнейшего соотношения и формулы.

1. Соотношение, связывающее собственно-орбитальную скорость частицы $\vec{u}_0$, скорость ее центра инерции $\dfrac{\vec{P}}{m(P)}$, и результирующую скорость $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \frac{\vec{P}}{m(P)}. \tag{41}$$

2. Формула, определяющая центростремительное ускорение частицы, вращающейся с частотой $\vec{\omega}$ по собственной орбите, центр которой движется равномерно и прямолинейно:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}_0}{dt} = \pm\vec{\omega} \times \vec{u}_0 \ ^{4)}. \tag{42}$$

(Знак нужно на самом деле выбирать, — сообразуясь с заранее принятыми направлениями векторов $\vec{u}_0$ и $\vec{\omega}$, — так, чтобы центростремительное ускорение не превратилось невзначай в центробежное.)

Поскольку векторы $\vec{a}_{\text{цс}}$, $\vec{u}_0$, $\vec{\omega}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. 9), можно использовать мнимую единицу $\left(i \equiv \sqrt{-1}\right)$ для преобразования формулы (42) к традиционному виду, очень удобному для выполнения расчетов:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \frac{d\vec{u}_0}{dt} = \pm\vec{u}_0 \times \vec{\omega} = \pm i \cdot \vec{u}_0 \cdot \omega. \tag{43}$$

(Теперь знак нужно выбирать, сообразуясь только с направлением вектора $\vec{u}_0$.)

Используя формулы (41) и (42), формулу (43) можно привести к окончательному виду:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}_{\text{цс}} = \pm i \cdot \left(\vec{u} - \frac{\vec{P}}{m(P)}\right) \cdot \omega. \tag{44}$$

---

[4] Центр собственной орбиты — центр инерции — **свободной** точечной частицы, если и движется, то лишь равномерно и прямолинейно. Поэтому

$$\frac{d\left(\frac{\vec{P}}{m(P)}\right)}{dt} = 0.$$

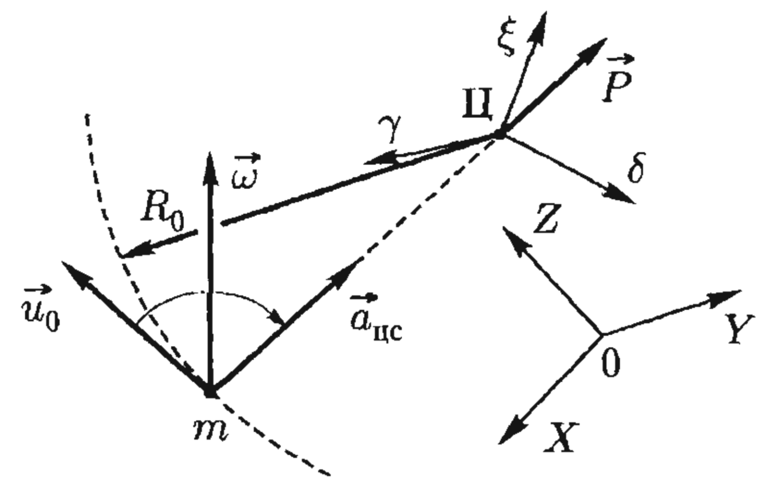


Рис. 9. Направления векторов.
Умножение вектора $\vec{u}_0$ на $(-i)$ эквивалентно его повороту на 90° по часовой стрелке в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\omega}$. (В любой момент времени частица массы m может с равной вероятностью оказаться в любой точке сферы радиуса R_0. В любой точке сферы векторы $\vec{a}_{цс}$, $\vec{u}_0$, $\vec{\omega}$ образуют трехгранный угол. Центр сферы обладает импульсом $\vec{P}$ относительно системы координат $\{X, Y, Z\}$)

3. Формула, определяющая абсолютные значения результирующей и собственно-орбитальной скоростей:

$$\vec{u}^2 = (\vec{u}_0)^2 = 3ç^2. \tag{45}$$

Теперь обратимся к уравнению Дирака. Достаточно принять его укороченную форму

$$i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{d\Psi}{dt}\right) = ç \cdot \widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}\Psi, \tag{46}$$

ибо, как уже говорилось в п. 4.1, «необходимость приписать точечной частице спин» обусловлена присутствием в гамильтониане Дирака только оператора $\widehat{\vec{\alpha}}$. Хотя ни Дирак, никто другой так и не сказали, какой же физической характеристике частицы поставлен в соответствие оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$ [5], (а также и оператор $\widehat{\beta}$ из неукороченного уравнения[6]), нельзя уклоняться от решения этого вопроса. Поэтому я попробую отождествить оператор $ç \cdot \widehat{\vec{\alpha}}$ с оператором $\vec{u}$, который тем самым ставится

---

[5] Доказательство столь серьезного заявления будет дано в гл. 5.

[6] Здесь вполне уместно привести слова одного из корифеев квантовой механики Ганса Бёте: «*Матрице* $\widehat{\beta}$ (то есть оператору $\widehat{\beta}$. — *Ф. В.*) *не дается никакой физической интерпретации*». Далее Г. Бёте приводит три формулы, содержащие оператор $\widehat{\beta}$, после чего пишет: «*Смысл этих результатов остается неясным*». (*Г. Бёте.* Квантовая механика. М.: Мир, 1965, с. 256.)

В гл. 6 будет названа та физическая величина, которой соответствует оператор $\widehat{\beta}$.

в соответствие результирующей скорости $\vec{u}$ частицы, вращающейся по собственной орбите, центр которой, выполняя функции центра инерции, обладает импульсом $\vec{P}$. Таким образом, величина $\vec{\alpha}$ $\left(\equiv \frac{\vec{u}}{\varsigma}\right)$ объявляется попросту обезразмеренной скоростью точечной частицы.

После отождествления $\varsigma \cdot \vec{\alpha}$ со скоростью частицы действительно имеет смысл проверить, не приведет ли использование дираковского гамильтониана к такому же несохранению величины $\varsigma \cdot \vec{\alpha}$ во времени, что и величины $\vec{L}$. Разумеется, несохранение скорости во времени будет означать, что частица, считающаяся свободной, тем не менее испытывает ускорение.

Итак, обратимся к формуле, аналогичной формуле (35) —

$$\widehat{\left(\frac{d\,(\varsigma \cdot \vec{\alpha})}{dt}\right)} = -i \cdot \frac{\varsigma}{\hbar} \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{H}_{Д} - \widehat{H}_{Д}\widehat{\vec{\alpha}}\right).$$

Свойства, которыми Дираку пришлось наделить оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$, таковы, что

$$\frac{\varsigma}{\hbar} \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{H}_{Д} - \widehat{H}_{Д}\widehat{\vec{\alpha}}\right) = \left\{\varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}} - \left(\frac{\widehat{\vec{P}}}{\frac{\widehat{H}_{Д}}{\varsigma^2}}\right)\right\}\left(\frac{2\widehat{H}_{Д}}{\hbar}\right) \neq 0,$$

и, следовательно

$$\widehat{\left(\frac{d\,(\varsigma \cdot \vec{\alpha})}{dt}\right)} = -i \cdot \left\{\varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}} - \left(\frac{\widehat{\vec{P}}}{\left(\frac{\widehat{H}_{Д}}{\varsigma^2}\right)}\right)\right\}\left(\frac{2\widehat{H}_{Д}}{\hbar}\right). \qquad (47)$$

Теперь настала пора обратиться к одному из фундаментальных постулатов квантовой механики — принципу соответствия. Согласно этому постулату,

соотношение между операторами физических характеристик должно быть идентично соотношению между самими характеристиками[7].

---

[7] Строго говоря, эта формулировка есть следствие более общей, согласно которой любому доквантовому («классическому») соотношению между физическими характеристиками соответствует операторное уравнение идентичного вида. Например, соотношению между величинами μ, ν, ς, ξ в виде $\mu = \nu \cdot \varsigma + \xi^2 - \ldots$ отвечает уравнение вида: $\widehat{\mu}\Psi = (\widehat{\nu\varsigma} + \widehat{\xi}^2 - \ldots)\Psi$. Вот поэтому и $\widehat{\mu} = \widehat{\nu\varsigma} + \widehat{\xi}^2 - \ldots$.

Используя этот принцип по конкретному поводу соотношений (43) и (44), легко преобразовать их в соотношения между операторами:

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{a}}_{\text{цс}} = -i \cdot \left\{\widehat{\vec{u}} - \frac{\widehat{\vec{P}}}{\widehat{m}}\right\} \widehat{\omega}, \tag{48}$$

$$\widehat{\vec{a}}_{\text{цс}} = -i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \cdot \widehat{\omega}. \tag{49}$$

Далее следует принять к сведению, что соотношению между величинами в виде $E = \varsigma^2 \cdot m$ (где ς^2 — константа) ставится в соответствие операторное уравнение $\widehat{E}\psi = \varsigma^2 \cdot \widehat{m}\psi$. Конкретный вид оператора $\widehat{E}$ таков: $\widehat{E} \equiv i \cdot \hbar \cdot \dfrac{\partial}{\partial t}$. А вот символом $\widehat{H}_{\text{Д}}$ как раз и обозначается величина виде $\varsigma^2 \cdot \widehat{m}$. Таким образом, согласно принципу соответствия, нужно отождествить оператор $\dfrac{\widehat{H}_{\text{Д}}}{\varsigma^2}$ с оператором массы частицы $\widehat{m}$.

Высказанное ранее предложение отождествить величины $\varsigma \cdot \vec{\alpha}$ и $\vec{u}$ автоматически влечет за собой отождествление величин $\left(\dfrac{d(\varsigma \cdot \vec{\alpha})}{dt}\right)$ и $\vec{a}_{\text{цс}} \left(= \dfrac{d\vec{u}}{dt}\right)$.

Наконец-то, можно сравнить формулы (47) и (48). Напрашивается естественный вывод — поставить в соответствие оператору $\left(\dfrac{2\widehat{H}_{\text{Д}}}{\hbar}\right)$ физическую характеристику — частоту вращения частицы по собственной орбите — величину ω. Теперь в нашем распоряжении имеются выражения для операторов всех представляющих интерес физических величин: скорости непосредственно частицы; ее массы движения; импульса ее центра инерции; центростремительного ускорения; частоты вращения. Так что, используя принцип соответствия, легко можно найти выражение для оператора $(\widehat{\vec{R}}_0)$ радиус-вектора точки собственной орбиты частицы.

Как хорошо известно из механики вращающейся частицы (см. рис. 9)

$$\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \cdot \vec{R}_0$$

(векторы $\vec{a}_{\text{цс}}$ и $\vec{R}_0$ антипараллельны во всех точках орбиты–сферы), а тогда, согласно принципу соответствия,

$$\widehat{\vec{a}}_{\text{цс}} = -\widehat{\omega}^2 \widehat{\vec{R}}_0. \tag{50}$$

Сравнив это соотношение с (49), получаем:

$$i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega} = \widehat{\omega}^2 \widehat{\vec{R}}_0. \tag{51}$$

Далее, используя свойства оператора $\widehat{\vec{u}}_0$ $\left(\equiv \varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}}\right)$ и оператора $\widehat{\omega}$ $\left(\equiv \frac{2\widehat{H}_Д}{\hbar} = \frac{2\varsigma}{\hbar} \cdot \widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}}\right)$, удается преобразовать выражение (51) в выражение

$$\widehat{\vec{R}}_0 = i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \left(\widehat{\omega}\right)^{-1} = \left(i \cdot \frac{\hbar}{2}\right) \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \left(\widehat{H}_Д\right)^{-1} \neq 0, \tag{52}$$

которое и определяет оператор $\widehat{\vec{R}}_0$ [8].

Последнее, что осталось найти, это выражение для оператора $\widehat{\vec{u}}_0$. Учитывая отмеченную в п. 3.3 связь между величинами $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$ [9], для оператора $\widehat{\vec{u}}_0$ также придется принять выражение

$$\widehat{\vec{u}}_0 = \varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}},$$

правда, для вполне определенной точки орбиты (см. рис. 3), тем самым предопределив значения проекций векторного оператора $\widehat{\vec{\alpha}}$ на оси координат, а, тем самым, и оператора $\widehat{\vec{R}}_0$ (см. рис. 3).

Имея в виду пример, рассматривавшийся в п. 4.1, выберем в качестве ***точно*** определенных величин: X-проекцию векторного оператора $\widehat{\vec{R}}_0$ и Y-проекцию векторного оператора $\widehat{\vec{u}}_0$. Соответствующие величины таковы:

$$\widehat{R}_{0,x} = \left(-i \cdot \frac{\hbar}{2}\right) \cdot \widehat{u}_{0,x} \left(\widehat{H}_Д\right)^{-1} = \left(-i \cdot \frac{\hbar \cdot \varsigma}{2}\right) \cdot \widehat{\alpha}_x \left(\widehat{H}_Д\right)^{-1};$$

$$\widehat{\vec{u}}_{0,y} = \widehat{u}_{0,y} = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_y.$$

(Напомню также, что $\widehat{m} = \frac{1}{\varsigma^2} \cdot \widehat{H}_Д$).

В этом случае точно определенной оказывается как раз Z-проекция векторного оператора спина:

$$\widehat{S}_z = \widehat{R}_{0,x} \left(\widehat{m}\widehat{u}_{0,y}\right) = \left(-\frac{i \cdot \hbar \cdot \varsigma}{2}\right) \cdot \left(\widehat{\alpha}_x \left(\widehat{H}_Д\right)^{-1} \frac{\widehat{H}_Д}{\varsigma^2} \left(\varsigma \cdot \widehat{\alpha}_y\right)\right) = -\frac{i \cdot \hbar}{2} \cdot \widehat{\alpha}_x \widehat{\alpha}_y.$$

---

[8] Представим равенство (51) в виде $\left(\widehat{\omega}^2 \widehat{\vec{R}}_0\right)\widehat{\omega}^2 = \left(i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega}\right) \widehat{\omega}^2 = \left(i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega}^2\right) \widehat{\omega}$. Поскольку $\widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega}^2 = \widehat{\omega}^2 \widehat{\vec{u}}_0$, $\widehat{\vec{u}}_0^{\,2} \widehat{\omega} = \widehat{\omega} \widehat{\vec{u}}_0^{\,2}$, имеем: $\left(i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega}^2\right) \widehat{\omega} = i \cdot \widehat{\omega}^2 \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega} = \widehat{\omega}^2 \widehat{\vec{R}}_0 \widehat{\omega}^2$, так что $i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega} = \widehat{\vec{R}}_0 \widehat{\omega}^2$. Далее: $i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega} \widehat{\omega}^{-2} = \widehat{\vec{R}}_0 \widehat{\omega}^2 \widehat{\omega}^{-2}$, откуда следует, что $\widehat{\vec{R}}_0 = i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \widehat{\omega}^{-1}$.

[9] См. формулы (22).

Естественно, что в качестве точно определенной можно выбрать любую из трех проекций векторного оператора $\widehat{\vec{S}}$. Поэтому

$$\widehat{\vec{S}} = -\frac{i \cdot \hbar}{2} \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \widehat{\alpha}_y \widehat{\alpha}_z + \vec{e}_y \cdot \widehat{\alpha}_z \widehat{\alpha}_x + \vec{e}_z \cdot \widehat{\alpha}_x \widehat{\alpha}_y\right). \tag{53}$$

Как того требует математический аппарат квантовой механики,

$$|\widehat{\vec{S}}|^2 = \left\{\left(-\frac{i \cdot \hbar}{2}\right) \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \widehat{\alpha}_y \widehat{\alpha}_z + \vec{e}_y \cdot \widehat{\alpha}_z \widehat{\alpha}_x + \vec{e}_z \cdot \widehat{\alpha}_x \widehat{\alpha}_y\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\left(+\frac{i \cdot \hbar}{2}\right) \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \widehat{\alpha}_z \widehat{\alpha}_y + \vec{e}_y \cdot \widehat{\alpha}_x \widehat{\alpha}_z + \vec{e}_z \cdot \widehat{\alpha}_y \widehat{\alpha}_x\right)\right\} = \frac{\hbar^2}{4} \cdot (1+1+1) = \frac{3\hbar^2}{4};$$

$$|\widehat{\vec{S}}_z|^2 = \left\{\left(-\frac{i \cdot \hbar}{2}\right) \cdot \vec{e}_z \cdot \widehat{\alpha}_x \widehat{\alpha}_y\right\} \left\{\left(+\frac{i \cdot \hbar}{2}\right) \cdot \vec{e}_z \cdot \widehat{\alpha}_y \widehat{\alpha}_x\right\} = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Кроме того оказывается, что так называемые собственные значения операторов $|\widehat{R}_{0,x}|^2$, $|\widehat{R}_{0,y}|^2$, $|\widehat{R}_{0,z}|^2, \widehat{\omega}^2$ равны, соответственно: $R_{0,x}^2 = R_{0,y}^2 = R_{0,z}^2 = \left(\frac{\hbar}{2m \cdot ç}\right)^2$, $\omega^2 = \left(\frac{2m \cdot ç^2}{\hbar}\right)^2$.

На этом обещанная читателям проверка закончена. Доказано, что из уравнения Дирака следует не просто необходимость приписать частице спин. Доказано, что точечная частица вращается по собственной орбите радиуса $R_0 = \dfrac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m\,(P) \cdot ç}$ с собственно-орбитальной скоростью, абсолютное значение которой равно $\sqrt{3} \cdot ç$, и с частотой $\omega = \frac{2m(P) \cdot ç^2}{\hbar}$.

Для электрона, центр инерции которого покоится ($\vec{P} = 0$, $m = m_0$): $R_0 \approx 2 \cdot 10^{-11}$ см, $\omega \approx 1{,}5 \cdot 10^{22}$ рад/с.

Что касается частицы, масса покоя которой равна нулю (например, нейтрино), то ее центр инерции выглядит движущимся прямолинейно и равномерно со скоростью $ç$ в любой системе отсчета. При этом значение импульса центра инерции $\vec{P} \neq 0$. Подобная частица не существует, если не движется ее центр инерции, а вся ее масса есть масса движения: $m = \dfrac{P}{ç}$ $(P \equiv |\vec{P}|)$. В этом случае $R_0 = \dfrac{\sqrt{3}\,\hbar}{2P}$; $\omega = \dfrac{2P \cdot ç}{\hbar}$.

Стоит обратить внимание на два обстоятельства.

1. Для своего существования ***точечной*** частице требуется ***объем*** пространства, вмещающий собственно-орбитальную сферу, и промежуток времени, не меньший периода вращения. Всякие попытки ограничить эти объем и промежуток с помощью потенциально-силовых полей приведут к уничтожению частицы.

2. Значение радиуса собственной орбиты (R_0) зависит от значения импульса центра инерции (P), а значение собственной частоты ω от энергии E[10]:

$$R_0 = \frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m(P)\cdot\varsigma} = \frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m_0\cdot\varsigma}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{P}{m_0\cdot\varsigma}\right)^2}}\right);$$

$$\omega = \frac{2E}{\hbar} = \frac{2m(P)\cdot\varsigma^2}{\hbar} = \frac{2m_0\cdot\varsigma^2}{\hbar}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{P}{m_0\cdot\varsigma}\right)^2}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{P\to\infty} R_0 = 0$, $\lim\limits_{P\to\infty}\omega = \infty$.

Таким образом, частица, обладающая огромным импульсом $\vec{P}$, вращается по орбите совершенно ничтожного радиуса с колоссальной частотой. В подобной ситуации действительно складывается впечатление, что точка вращается вокруг оси, проходящей через саму точку. При всем том и абсолютное значение спина остается неизменным (равным $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\hbar$), и абсолютное значение собственно-орбитальной скорости (равной $\sqrt{3}\cdot\varsigma$).

[10] Для свободной частицы $E = m_0\cdot\varsigma^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{P}{m_0\cdot\varsigma}\right)^2}$.

Глава 5

О непостижимой эффективности математики в физике

«По мнению Джинса[1], математические уравнения — единственное, что нам достоверно известно о явлениях физического мира. Урожай, венчающий все усилия в физике, — лишь набор математических формул; реальная сущность математической субстанции навсегда останется непознаваемой».

«...есть все основания утверждать, что новая физика — наука... математическая...; "физическая реальность", которую описывают уравнения Максвелла, представляет собой смутное, "бесплотное" понятие электромагнитного поля».

«Возможно, Эддингтон[1] прав, и знанием математических соотношений и структур исчерпывается все, чем может порадовать физическая наука. Джинс добавляет, что математическое описание Вселенной и есть окончательная реальность. Используемые нами для большей наглядности картины... — шаг в сторону от реальности».

Цитаты из книги: М. Клайн. Математика. Поиск истины.
М.: Мир, 1988, *с.* 253, 254.

5.1. Странный результат

Известная поговорка «наши недостатки — продолжение наших достоинств» имеет к людям науки прямое отношение. Давайте выясним, как получилось, что гранды теоретической физики XX века почти 70 лет не замечали очевидного, содержащегося, например, в уравнении Дирака[2]. Ведь это уравнение не только приводится и обсуждается в многочисленных статьях и монографиях, но ***тщательно*** (как уверяют нас, простых смертных) анализируется в учебниках и учебных пособиях.

---

[1] Д. Джинс и А. Эддингтон — теоретики, известные своими выдающимися достижениями в физике, астрофизике, астрономии.

[2] Читателю следует иметь в виду, что упреки в адрес Дирака, Эйнштейна и других Великих мира физики — это упреки в адрес гениев. Просто и гении не должны быть вне критики. Величие их в их выдающихся достижениях, а их ошибки должны исправлять их последователи.

Давайте познакомимся хотя бы с тем, как анализировал свое уравнение сам Дирак[3].

На первом этапе он проверил, сохраняется ли во времени орбитальный механический момент $\vec{L}$. Однако..., с какой это стати вдруг потребовалось выяснять, сохраняется ли во времени так называемый орбитальный механический момент у частицы, состояние которой описывается именно уравнением Дирака? Ведь имеется в виду частица свободная — движущаяся ***прямолинейно*** (и равномерно). Конечно, при произвольном выборе системы координат и свободная частица может показаться вращающейся, но хорошо известно, что в этом случае ее «орбитальный» механический момент неизменен во времени[4].

Однако может быть все обстояло совершенно иначе. Ведь тот факт, что точечная частица обладает спином, был известен до появления уравнения Дирака. Известно было и, что такая частица, как электрон, пребывая в поле атомного ядра, обладает именно полным механическим моментом ($\vec{M}$). В этом случае во времени должен сохраняться именно полный механический момент, а не его орбитальная часть. Но, вот проблема... Хотя еще до появления уравнения Дирака было хорошо известно, как построить оператор орбитального механического момента, тем не менее было совершенно непонятно, как построить оператор спина. И уравнение Дирака, казалось бы, ничем здесь помочь не могло, ибо как ни всматривайся в него, оператор спина не углядеть. И все же именно дираковский гамильтониан, содержащий загадочный оператор $\widehat{\alpha}$, помог разрешить проблему. Нужно было построить оператор $\widehat{\left(\frac{dL_z}{dt}\right)}$, убедиться в том, что $\widehat{\left(\frac{dL_z}{dt}\right)} \neq 0$, и, помня, что L_z это лишь часть z-проекции полного механического момента ($M_z = L_z + S_z$), потребовать равенства нулю оператора $\widehat{\left(\frac{d(L_z+S_z)}{dt}\right)}$. Но, поскольку $\widehat{\left(\frac{d(L_z+S_z)}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left[(\widehat{L}_z+\widehat{S}_z)\widehat{H}-\widehat{H}(\widehat{L}_z+\widehat{S}_z)\right]$, в наших руках оказывается операторное уравнение

$$\left[(\widehat{L}_z + \widehat{S}_z)\widehat{H} - \widehat{H}(\widehat{L}_z + \widehat{S}_z)\right] = 0,$$

в котором присутствует только одна неизвестная величина — оператор z-проекции спина $\widehat{S}_z$.

---

[3] Далее будут приводиться цитаты из книги: *П. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960, с. 160–161, 165, 360–363.

[4] См. рис. 2.

На следующем этапе совершенно естественными выглядели бы поиски оператора центростремительного ускорения. Но нельзя забывать, что спин потому и считается до сих пор загадочной характеристикой точечной частицы, что частицу отказываются признать участвующей в собственном вращении. Поэтому я могу понять, почему ни Дирак, никто другой не стали искать оператор центростремительного ускорения (величину $\widehat{\vec{a}}_{\text{цс}}$), но я не могу понять, зачем понадобился им оператор скорости. Но пусть... Давайте посмотрим, как же устанавливают (до сих пор) вид этого оператора.

Дирак считал, что математика сама должна подсказать вид оператора скорости. Поэтому он обратился к... ***«уравнению»***[5]

$$\frac{d\widehat{x}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\widehat{x}\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}\widehat{x}\right), \tag{54}$$

которое и завело все последующее в тупик.

Чтобы читатель смог легко разобраться в дальнейших перипетиях, ему следует познакомиться с происхождением «уравнения» (54).

Прежде всего, следует обратить внимание на то, что формула

$$\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\widehat{x}\widehat{H}_{\text{Д}} - H_{\text{Д}}\widehat{x}\right), \tag{55}$$

в отличие от формулы (54), ***является не уравнением***, а выражением, определяющим оператор $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$. Даже, если $\widehat{x} \equiv x$, то тем не менее $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \neq \frac{d\widehat{x}}{dt}$. Другими словами, в том представлении, в котором $\widehat{x} \equiv x$, оператор $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$ вовсе не тождественен самой величине $\frac{dx}{dt}$.

А теперь рассмотрим формулу

$$\frac{d\widehat{v}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \cdot \left\{\widehat{v}\,(t)\,\widehat{H}\,(t) - \widehat{H}\,(t)\,\widehat{v}\,(t)\right\}, \tag{56, a}$$

к одной из разновидностей которой — (54) — решил обратиться Дирак.

Допустим — самое простое, — что $\widehat{H}$ не зависит явно ни от t, ни от $\widehat{v}$. Ради удобства введем обозначение $\widehat{v}\,(t) \equiv \widehat{v}_H$[6] и представим

[5] Кавычки, как потом станет ясно, поставлены не зря.

[6] Ведь в результате решения уравнения (56, а) величина $\widehat{v}_H$ в общем случае должна зависеть не только от t, но и от $\widehat{H}$.

формулу (56, а) в виде

$$\frac{d\widehat{\nu}_H}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\nu}_H\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}_H\right). \tag{56, б}$$

Теперь нужно ответить на вопрос, чем именно является эта формула: выражением, определяющим производную оператора $\widehat{\nu}_H$ по t, или дифференциальным уравнением, содержащим оператор $\widehat{\nu}_H$ в качестве неизвестной величины.

Если первое, то ***все*** свойства операторов $\widehat{\nu}_H$ и $\widehat{H}$, включая вид зависимости $\widehat{\nu}_H$ от t и $\widehat{H}$, должны быть ***заведомо известны***.

Ну, а если второе? В таком случае это уравнение — *принципиально нерешаемое*. Ведь для решения уравнения типа $\frac{d\widehat{\nu}_H}{dt} = f\left(\widehat{\nu}_H, \widehat{H}\right)$ нужно знать сам вид зависимости f от $\widehat{\nu}_H$ и $\widehat{H}$.

Таким образом, браться решать уравнение (56, б) можно только после вычисления скобки $\left(\widehat{\nu}_H\,\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}_H\right)$[7]. Но для этого, в свою очередь, необходимо знать все свойства не только оператора $\widehat{H}$ (допустим, что их-то мы знаем), но и ***того самого оператора $\widehat{\nu}_H$, который является неизвестным***. Однако лишь решение уравнения позволило бы выразить $\widehat{\nu}_H$ через оператор $\widehat{H}$, свойства которого были известны заранее. Вот так и возникает порочный замкнутый круг.

А теперь следует принять к сведению, что Дирак вывел формулы (56) с помощью чисто математических операций над уравнением состояния, записанным в самом общем виде. При этом в качестве объекта Дирак взял конструкцию $\widehat{H}^{-1}\widehat{\nu}\widehat{H}$, где величины $\widehat{H}^{-1}$, $\widehat{\nu}$, $\widehat{H}$ – операторы с ***заведомо известными*** свойствами. Эта конструкция и обозначена символом $\widehat{\nu}_H$:

$$\widehat{\nu}_H \equiv \widehat{H}^{-1}\widehat{\nu}\widehat{H}. \tag{57}$$

В таком случае формулу (56, б) (равно, как и формулу (56, а)) нельзя воспринимать иначе, как выражение, определяющее производную оператора, но именно оператора $\widehat{\nu}_H$ (по t), а не оператора $\widehat{\nu}$.

Совершенно недопустима подстановка в правую часть выражения (56, б) оператора $\widehat{\nu}$ вместо $\widehat{\nu}_H$. Давайте посмотрим на очень простом примере, к чему приведет подобная вольность.

Выберем так называемое координатное представление операторов, в котором

$$\widehat{x} \equiv x; \quad \widehat{P}_x = -i\cdot\hbar\cdot\frac{d}{dx}; \quad \widehat{P}_x x - x\cdot\widehat{P}_x = -i\cdot\hbar.$$

[7] До этого скобка $\left(\widehat{\nu}_H\,\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}_H\right)$ остается просто символом.

Пусть $\widehat{H} = \dfrac{(\widehat{P}_x)^2}{2m_0}$. Напишем «по ошибке»

$$\left(\frac{d\widehat{x}}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(x\cdot\widehat{H} - \widehat{H}x\right).$$

Вычислив скобку, получаем:

$$-\frac{i}{\hbar}\cdot\left(x\cdot\widehat{H} - \widehat{H}x\right) = \left(\frac{\widehat{P}_x}{m_0}\right) = -\left(\frac{i\cdot\hbar}{m_0}\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right),$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(\frac{i\cdot\hbar}{m_0}\right)\cdot\left(\frac{d..(\;)}{dx}\right).$$

Этот абсурдный, разумеется, результат приводит в свою очередь к другому столь же абсурдному результату:

$$x = x(t=0) - \left(\frac{i\cdot\hbar\cdot t}{m_0}\right)\cdot\left(\frac{d..}{dx}\right).$$

К великому сожалению, Дирак повсюду принимает ***определение*** производной оператора $\widehat{\nu}_H$ за ***дифференциальное уравнение*** с оператором $\widehat{\nu}_H$ в качестве неизвестного. А превращается это, как говорилось, принципиально нерешаемое уравнение в решаемое только потому, что в его правую часть вместо оператора $\widehat{\nu}_H$, который должен там находиться и считаться неизвестным[8], Дирак подставляет известный оператор $\widehat{\nu}$. Лишь тогда становится возможным якобы скобку $\left(\widehat{\nu}_H\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}_H\right)$, ***а на самом деле скобку*** $\left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right)$, вычислить[9].

Что же касается выражения

$$\widehat{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right), \tag{58}$$

[8] Коль скоро решено, что мы имеем дело с дифференциальным уравнением.

[9] Хотелось бы обратить внимание читателя на одно обстоятельство. Если подставить в скобку оператор $\widehat{\nu}$, допустим, что не зависящий от времени (что и сделал Дирак), то выражение

$$\frac{d\widehat{\nu}}{dt} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right)$$

после вычисления скобки $\left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right)$ превращает оператор $\widehat{\nu}$ в зависящий от времени (в случае, если $\left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right) \neq 0$), причем зависимость эта может оказаться совершенно экзотической. Вообще говоря, следовало бы помнить, что вид зависимости координаты частицы от времени определяется видом зависимости скорости от времени, а не наоборот; вид зависимости скорости частицы от времени — видом зависимости ускорения от времени, а не наоборот. Нельзя путать причину и следствие.

то оно тоже выведено, но его вывод опирается на постулат, который обоснован ***чисто физическими*** соображениями[10]. В ***выражении*** (58) фигурируют ***три*** оператора, причем ***все*** свойства оператора $\widehat{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)}$ являются, если так можно выразиться, функциями заведомо известных свойств операторов $\widehat{\nu}$ и $\widehat{H}$. Если операторы $\widehat{\nu}$ и $\widehat{H}$ ***не*** коммутируют, то оператор $\widehat{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)}$ по крайней мере существует (вне зависимости от того, окажется он меняющимся во времени или нет). ***Но если операторы $\widehat{\nu}$ и $\widehat{H}$ коммутируют, то оператора $\widehat{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)}$ просто не существует.***

Теперь, когда читатель ознакомлен с качественно различным происхождением формул (56) и (58), можно приступать к изложению сути дела.

А суть в том, что Дирак обратился не к ***выражению***

$$\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(x\cdot\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}x\right), \tag{59}$$

а к «***уравнению***»

$$\left(\frac{d\widehat{x}(t)}{dt}\right) = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{x}(t)\widehat{H}_{\text{Д}}(t) - \widehat{H}_{\text{Д}}(t)\widehat{x}(t)\right). \tag{54}$$

И тут была сделана еще и специфическая ошибка, связанная с неряшливостью в обозначениях. Дирак не ставил крышечек над

---

[10] Любознательный читатель может ознакомиться с выводом (он очень простой), например, по книгам: *Л. Ландау, Е. Лифшиц.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963 (§ 9, с. 43–45); *В. Левич, Ю. Вдовин, В. Мямлин.* Курс теоретической физики, т. 2. М.: Физматгиз, 1971 (§ 31, с. 115, 116).

Я должен, однако, предупредить, что хотя § 9 одной книги и § 31 другой книги носят название «Дифференцирование операторов по времени», ни о каком дифференцировании ***операторов*** в этих параграфах речи на самом деле не идет, и даже определения понятия $\frac{d\widehat{\nu}}{dt}$ в них не дается.

Пользуясь случаем, отмечу грубую ошибку, допущенную в процессе вывода выражения $\widehat{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right)$ — при переходе от формулы (17.2) к (17.3) — в популярном учебном пособии для университетов (*А. С. Давыдов.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963, § 17, с. 65, 66).

Аналогичная ошибка допущена на с. 156 в книге: *Л. Шифф.* Квантовая механика. М.: ИЛ, 1957.

символами операторов, и потому в его записи различить величины

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d\widehat{x}}{dt}, \quad \widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

невозможно. Все они у Дирака обозначены одинаково — как $\frac{dx}{dt}$. Однако в том представлении, которое он использовал, $\widehat{x} \equiv x$, и потому $\left(\frac{d\widehat{x}}{dt}\right) \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)$, но $\left(\frac{dx}{dt}\right) \neq \widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$. В результате «уравнение» (54) допустимо считать превратившимся в выражение (59), причем после вычисления скобки оказалось, что $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x$. Разумеется, в левой части выражения (59) может присутствовать только ***оператор*** физической величины (то есть $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$), но ***не сама величина*** $\frac{dx}{dt}$. Правильно так:

$$\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x. \tag{60}$$

Дирак был удивлен этим результатом, ибо ему (в отличие от нас с вами) и в голову не приходило предположить, что точечная свободная частица может двигаться иначе, нежели прямолинейно и равномерно. Касаясь равенства (60), Дирак пишет: «*Это — результат довольно неожиданный, так как он предполагает совсем другое соотношение между скоростью и импульсом, чем в классической механике*». Суть этого пассажа состоит в следующем. Поскольку ***для Дирака*** $\left(\frac{dx}{dt}\right) \equiv V_x$, а в результате вычислений он установил, что $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x$[11], у него не вызвала сомнений необходимость признать соотношение $\widehat{V}_x = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x$ и отказаться от естественного соотношения $\widehat{V}_x = \left(\frac{\widehat{P}_x}{\widehat{m}}\right)$.

Сейчас очень важно познакомиться с тем, что сделал Дирак после того, как он решил, что $V_x \neq \left(\frac{P_x}{m}\right)$.

[11] Равенство $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x$, в котором $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ не является оператором, математически совершенно бессмысленно.

Твердая убежденность Дирака в том, что «измерение проекции скорости свободного электрона[12] всегда приводит к результату $\pm\varsigma$», я думаю, покоилась на твердой убежденности в «непостижимой эффективности математики в физике вообще». А тогда, уж если ***получилось из расчетов***, что $V_x = \pm\varsigma$, значит только так оно и может быть в ***действительности***.

Но Дирак не сомневался и в другом: в том, что скорость точечной свободной частицы может также принимать хотя и вполне определенное значение, но ***меньшее*** ς (находящееся в пределах от 0 до ς)[13].

Признав полученный результат ($\widehat{V}_x = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x$) противоречащим тому очевидному факту, что *«электроны, наблюдаемые на практике* (то есть точечные частицы, с которыми мы сталкиваемся в реальной обстановке. — *Ф. В.*), *имеют скорости, существенно меньшие скорости света»*, Дирак решил дать этому противоречию объяснение.

5.2. Объяснение Дирака

Сначала небольшое введение.

1. В рамках доквантовой механики хорошо известно выражение

$$\vec{V}(t) = \lim_{\delta x \to 0} \left.\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}\right|_t = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt},$$

считающееся ***кинематическим*** определением так называемой мгновенной скорости частицы. Хотя в этом выражении радиус-вектор $\vec{r}$ представляет собой координаты точки пространства (существующего вне зависимости от присутствия в нем чего бы то ни было), принято считать величину $\vec{r}$ характеристикой частицы, а потому допускать возможность зависимости $\vec{r}$ от времени t. Единственной переменной, ни от чего не зависящей, признается лишь момент вечности t.

Простоты ради, в дальнейшем изложении будет фигурировать X-проекция скорости, определенная выражением

$$V_x(t) = \lim_{\delta x \to 0} \left.\frac{\delta x}{\delta t}\right|_t = \frac{dx(t)}{dt}. \qquad (61,\text{a})$$

[12] Электрон здесь и далее выступает как представитель точечных частиц любой разновидности. Заряд электрона свободного, то есть — ни с чем не взаимодействующего, ни в чем не проявляется.

[13] Мы-то сейчас понимаем, что со скоростью $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m(P)}$, способной принимать вполне определенные значения в пределах от 0 до ς, движется центр собственной орбиты (центр инерции) точечной частицы, а не она сама. А вот со скоростью, X-проекция которой равна $\pm\varsigma$, движется уже сама частица.

Опираясь на это выражение, можно образовать понятие скорости, усредненной по некоторому, отнюдь не бесконечно короткому промежутку времени δt:

$$\langle V_x \rangle_{\delta t}(t) = \frac{1}{\delta t} \cdot \int\limits_{t-\frac{\delta t}{2}}^{t+\frac{\delta t}{2}} V_x(t') \cdot dt' \qquad (61, б)$$

(зависимость $\langle V_x \rangle_{\delta t}$ от t обусловлена тем, что центр δt-промежутка можно смещать вдоль оси времени). Если частица существует вечно, то, строго говоря, величину δt следует считать бесконечно большой. Далее эта величина будет считаться, по крайней мере, достаточно большой.

Если частица является свободной, ее мгновенная скорость в любой момент вечности остается одной и той же, как по величине, так и по направлению, и, следовательно, средняя по времени скорость совпадает с мгновенной: $\langle V_x \rangle_{\delta t} = V_{\text{мгн},\,x}$.

2. В рамках квантовой механики радиус-вектор $\vec{r}$ точки пространства считается столь же независимой переменной, сколь момент вечности t, а потому дать мгновенной скорости кинематическое определение невозможно в принципе. Ведь если величины x и t не находятся в функциональной связи, придется обращаться к конструкции $\lim\limits_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta t \to 0}} \frac{\delta x}{\delta t}$, а она, увы, является математически бессодержательной. Однако все это не касается средней по времени скорости. Дело в том, что

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} V_x(t) \cdot dt = x(t_2) - x(t_1) = \delta x,$$

и потому выражение (61, б) можно заменить выражением

$$\langle V_x \rangle_{\delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$

согласно которому частицу допустимо считать исчезнувшей в одной точке пространства (в один момент времени) и возникшей в другой точке (в другой момент). Поскольку именно такая интерпретация принята в квантовой механике, кинематическое определение средней по времени скорости выражением (62) остается справедливым и в квантовой механике.

Теперь следует вспомнить, что помимо кинематических определений мгновенной и средней скоростей существуют и ***динамические*** их определения, причем одинаково справедливые и в доквантовой, и в квантовой механике:

$$V_x = \frac{P_x}{m}; \quad \langle V_x \rangle_{\delta t} = \frac{dE_{\text{полн}}}{dP_x}, \tag{63, а, б}$$

где $E_{\text{полн}}$ — полная энергия частицы (сумма кинетической и потенциальной энергий).

Если речь идет о частице свободной, ни с чем не взаимодействующей, ее полная энергия совпадает с кинетической, и потому: $\dfrac{P_x}{m} = \dfrac{dE_{\text{кин}}}{dP_x}$.

Если $E_{\text{кин}} = \varsigma \cdot \sqrt{\vec{P}^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}$, то

$$\frac{dE_{\text{кин}}}{dP_x} = \frac{P_x}{m} \quad \left(m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{P}}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}\right). \tag{63, в}$$

Если $E_{\text{кин}} = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}$, то

$$\frac{dE_{\text{кин}}}{dP_x} = \frac{P_x}{m_0}. \tag{63, г}$$

В дальнейшем, учитывая, что речь будет идти только о свободной частице, вместо символа $E_{\text{кин}}$ будет использоваться символ E. Кроме того, вместо символа $\langle\ \rangle_{\delta t}$ будет использоваться символ $\langle\ \rangle$.

Подчеркнув, что скорость, оператор X-проекции которой оказался равным $\varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x$, есть скорость мгновенная, Дирак решил доказать, что ***измерение*** именно мгновенной скорости (естественно, с помощью ***реальных*** приборов) может привести только к результату $V_x = \pm\varsigma$. При этом Дирак считал, что к ***другим*** результатам (значениям между 0 и ς) приводит измерение именно ***средней*** скорости. Для доказательства Дирак решил опереться на один из фундаментальных постулатов квантовой механики, известный как *соотношение неопределенностей Гайзенберга* и выражаемый в виде

$$\Delta P_x \cdot \Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{64}$$

Здесь ΔP_x и Δx — погрешности (неопределенности) измерений импульса P_x и координаты x точечной частицы, выполненных в один и тот же момент времени. Существенно, что имеются в виду погрешности, зависящие ***только от конструкций*** измерительных приборов.

Как следует из соотношения неопределенностей, при точном измерении X-координаты ($\Delta x = 0$) величина $\Delta P_x = \infty$, и это означает, что импульс частицы P_x приобретает с ***равной*** вероятностью ***любое*** значение в пределах $-\infty \div +\infty$.

В рамках дорелятивистской механики $m = m_0$ и $V_x = \dfrac{P_x}{m_0}$. Поэтому в дорелятивистской квантовой механике, если бы оказалось, что $\Delta P_x = \infty$ и, стало быть, импульс P_x приобретал с равной вероятностью любое значение в пределах $-\infty \div +\infty$, это же относилось бы и к скорости V_x. Очень легко доказать, что в ***релятивистской*** квантовой механике $\left(\text{в которой } m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{P}{m_0 \cdot \varsigma}\right)^2}\right)$ при условии $\Delta P_x = \infty$ мгновенно-локальная скорость (определяемая выражением $V_x = \dfrac{P_x}{m(P)}$) с ***равной*** вероятностью имеет ***любое*** значение в пределах от $-\varsigma$ до $+\varsigma$. Из формул (63, б, в) следует, что

$$\lim_{P_x \to \pm\infty} V_x = \lim_{P_x \to \pm\infty} \left(\frac{P_x}{m(P)}\right) = \lim_{P_x \to \pm\infty} \frac{P_x}{m_0 \cdot \sqrt{1 + \left[\dfrac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{(m_0 \cdot \varsigma)^2}\right]}} = \pm\varsigma.$$

Значит, если $\Delta P_x = \infty$, то $\Delta V_x = \varsigma$.

На этом «введение» закончено, и можно обратиться к доказательству Дирака. Оно начинается следующей фразой:

«*Для измерения скорости мы должны измерить координату в два слегка различных момента времени и затем разделить изменение координаты на интервал времени (измерение импульса и вычисление скорости по импульсу не годится, поскольку обычное соотношение между скоростью и импульсом здесь несправедливо).*»

На всякий случай я прокомментирую эту фразу.

Речь идет о кинематическом определении скорости выражением (61, а). Замечание в скобках можно было бы расценить как отражающее истинное состояние частицы, но с точки зрения Дирака оно справедливо совсем по другой причине: выражение $V_x = \left(\dfrac{P_x}{m(P)}\right)$ совместимо только с условием $0 \leqslant V_x \leqslant \varsigma$, а поскольку оказалось, что $V_x = \pm\varsigma$, значит $V_x \neq \dfrac{P_x}{m(P)}$. Итак Дирак собирается доказать, что, определив скорость выражением $V_x = \lim\limits_{\delta t \to 0}\left(\dfrac{\delta x}{\delta t}\right)$ и измерив очень малые величины δt и δx, мы неизбежно придем к равенству $V_x = \pm\varsigma$.

Доказательство Дирака

Погрешность в измерении каждой из координат (x и $x + \delta x$), обусловленная применением реальных устройств, должна быть намного меньше самой разности δx. Только тогда понятие разности δx обретает содержательность. Отобразим сказанное условием $\delta x \gg \Delta x$, где Δx-погрешность (простоты ради — суммарная), называемая также неопределенностью значения координаты, если эта неопределенность зависит только от конструкции измерительного устройства.

Поскольку в выражении (61, а) необходимо перейти к пределу $\delta x \to 0$, следует применить такие устройства, чтобы и $\Delta x \to 0$. Однако, согласно соотношению неопределенностей (64), если $\Delta x \to 0$, то $\Delta P_x \to \infty$. Последнее, как уже несколько раз говорилось, означает, что импульс с равной вероятностью может иметь любое значение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. К сожалению, Дирак неправильно интерпретирует соотношение неопределенностей. Он почему-то считает, что если все значения импульса P_x в пределах $-\infty \div +\infty$ равновероятны, то $|P_x| = \infty$. Он пишет: «*Большая точность, с которой известна координата электрона..., должна приводить, согласно принципу неопределенности, к почти полной неопределенности импульса. Это значит, что почти все значения импульса вероятны, так что импульс почти наверняка бесконечен*». Увы, последнее совершенно неверно, а слова «*почти*», «*наверняка*» — совершенно излишни.

Однако, предположим, что мы становимся на точку зрения Дирака, считавшего, что техническая реализация выражения $V_x = \lim\limits_{\delta t \to 0}\left(\dfrac{\delta x}{\delta t}\right)$ (иными словами — измерение мгновенной скорости) автоматически сопровождается равенством $P_x = \pm\infty$. Установив, что это так, нужно еще каким-то образом связать две величины: P_x и V_x. И вот тут доказательство Дирака окончательно заходит в тупик. Он сам отверг выражение $V_x = \dfrac{P_x}{m(P)}$ на том основании, что иначе придется признать за скоростью V_x способность принимать любое ***определенное*** значение в пределах от 0 до ς. Нельзя обратиться и к выражению $\langle V_x \rangle = \dfrac{dE}{dP_x}$, ибо оно определяет ***среднюю*** скорость, измерение которой как раз и ***должно давать*** вышеупомянутое любое ***определенное*** значение в пределах от 0 до ς[14].

[14] Дирак нигде не приводит формулы $\langle V_x \rangle = \frac{dE}{dP_x}$. Однако у него фигурирует в качестве средней скорости $\langle V_x \rangle$ величина $(\varsigma^2 \cdot P_x \cdot E^{-1})$. Трудно догадаться, почему Дирак прямо не написал выражения (63, б), представляющего собой динамическое определение средней

Однако не существует никаких иных соотношений между импульсом и скоростью кроме двух ранее упомянутых.

Как ни странно, но у Дирака нет даже намека на то, что он использывал какое-то конкретное соотношение между импульсом и скоростью. После цитировавшейся фразы *«это значит, что... импульс почти наверняка бесконечен»* сразу же следуют слова: *«бесконечная же величина проекции импульса соответствует величине ç для соответствующей проекции скорости»*[15].

5.3. Промежуточные итоги

Итак, не оправдалась надежда на то, что математика сама подскажет вид оператора скорости свободной точечной частицы и сама подскажет, какие значения скорость должна принимать. Это неудивительно, ибо даже теоретическая физика не сводится к математике. Причины неудач состоят в следующем.

Во-первых (самое главное), скорость, оператор которой равен $\varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}}$, не является скоростью прямолинейного и равномерного движения, и потому все, о чем говорит Дирак на протяжении своих объяснений и доказательств, не имеет отношения к физической реальности, которую тем не менее ***точно*** отображает уравнение... Дирака.

Во-вторых, в рамках представлений Дирака (пусть неправильных) о характере движения именно *свободной* точечной частицы, скорости

скорости, но нетрудно догадаться, что $(\varsigma^2 \cdot P_x \cdot E^{-1}) = \left(\frac{dE}{dP_x}\right)$. Загадкой остается также, почему Дирак не отметил, что $(\varsigma^2 \cdot E^{-1}) = \left(\frac{1}{m}\right)$. Тогда сразу бы стало ясно, что $\left(\frac{dE}{dP_x}\right) = (\varsigma^2 \cdot P_x \cdot E^{-1}) = \left(\frac{P_x}{m}\right)$, а тем самым, что $\langle V_x \rangle = V_x$.

[15] Необходимо отметить, что в подстрочной сноске к доказательству Дирака редактор русского перевода его книги В. А. Фок (не менее выдающийся физик, чем П. Дирак) указал на недопустимость использования соотношения Гайзенберга (64) для расчета неопределенности мгновенной скорости при отказе связать последнюю с другой мгновенной величиной — импульсом. Иными словами, если $V_x \neq \left(\frac{P_x}{m}\right)$, то из равенства $\Delta P_x = \infty$ ничего не следует в отношении величины ΔV_x, и все доказательство Дирака оказывается несостоятельным.

В качестве курьеза привожу фрагмент из предисловия Дирака к русскому изданию его книги: «Я одобряю сделанные редактором замечания в сносках и приложении в конце книги; то и другое имеет целью облегчить читателю понимание затруднительных мест».

Сколь внимательно читали книгу Дирака Великие мира физики (включая самого Дирака) свидетельствует тот факт, что до сих пор не было никакой реакции на замечание В. А. Фока.

мгновенно-локальная ($\vec{V}_{\text{мгн-лок}} = \left(\dfrac{\vec{P}}{m(P)}\right)$) и усредненная по бесконечно большому пространственно-временному континууму ($\langle\vec{V}\rangle = \left(\dfrac{dE}{d\vec{P}}\right)$) обязаны совпадать. Формулы, конечно, подтверждают факт совпадения, ибо коль скоро

$$E = \varsigma \cdot \sqrt{\left(\vec{P}\right)^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2} = m \cdot \varsigma^2,$$

то

$$\left(\frac{dE}{d\vec{P}}\right) = \left(\frac{\vec{P}}{\left(\frac{E}{\varsigma^2}\right)}\right) = \left(\frac{\vec{P}}{m}\right).$$

В таком случае, если бы неопределенность импульса $\vec{P}$ даже имела место, она приводила бы к ***одинаковой*** неопределенности как мгновенной, так и средней скорости[16].

В-третьих, импульс $\vec{P}$ частицы свободной должен считаться, по определению, неизменным в любой точке пространства и в любой момент времени. Значение и направление импульса $\vec{P}$ частице свободной, вечно движущейся в бесконечно протяженном ***пустом*** пространстве, могут быть только приписаны. Поэтому Дираку следовало считать, что $\Delta P_x = \Delta P_y = \Delta P_z = 0$. Бесконечно велики как раз неопределенности координат: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \infty$[17].

Что же касается измерения значения мгновенной скорости, то подобное измерение попросту несовместимо с представлением о частице, вечно движущейся прямолинейно и равномерно. Совпадение ее мгновенной скорости со средней ***постулируют***, причем из чисто физических соображений. А вот среднюю скорость можно измерить, причем так, чтобы с одной стороны технически реализовать именно кинематическое ее определение

$$\langle V_x\rangle = \lim_{\delta t\to\infty}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right) = \lim_{\delta x\to\infty}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right),$$

[16] Напомню, что P_x — это X-проекция импульса частицы, переадресованная именно ее центру инерции, так что V_x и $\langle V_x\rangle$ — это X-проекции мгновенной и средней по времени скоростей центра инерции частицы.

[17] Поскольку все точки пустого пространства, считающиеся различными лишь в результате введения системы координат, ***физически абсолютно идентичны***, единственно разумный ответ на вопрос «в какой точке частица присутствует в данный момент времени?» может быть таков: с ***равной*** вероятностью в ***любой***.

но с другой стороны не «размазать» импульс P_x. Для этого достаточно ***сделать*** разность координат δx настолько большой, чтобы даже специально создаваемая огромная неопределенность (Δx) измерения X-координаты оказалась все же намного меньше значения δx: $\delta x \gg \Delta x$. Если затем устремить $\delta x \to \infty$, легко добиться выполнения ***двойного*** неравенства

$$\delta x \gg \Delta x \gg \left(\frac{\hbar}{2P_x}\right),$$

устремляя и $\Delta x \to \infty$. Нужно лишь следить за тем, чтобы Δx оставалась величиной ***высшего*** порядка малости по сравнению с δx. Вот тогда и можно совместить два соотношения:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to\infty\\ \delta x\to\infty}}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\pm\frac{\Delta x}{\delta t}\right)=\lim_{\substack{\Delta x\to\infty\\ \delta x\to\infty}}\frac{\delta x}{\delta t}\cdot\left(1\pm\frac{\Delta x}{\delta x}\right)=\langle V_x\rangle$$

(при этом $\left(\frac{\Delta\langle V_x\rangle}{\langle V_x\rangle}\right)=\left(\frac{\Delta x}{\delta x}\right)\to 0$);

$$\lim_{\Delta x\to\infty}(P_x\pm\Delta P_x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\left(P_x\pm\left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)\right)=\lim_{\Delta x\to\infty}P_x\cdot\left(1\pm\left(\frac{\hbar}{2\Delta x\cdot P_x}\right)\right)=P_x$$

(при этом $\left(\frac{\Delta P_x}{P_x}\right)=\left(\frac{\hbar}{2\Delta x\cdot P_x}\right)\to 0$).

В-четвертых, вне зависимости от того, каким образом сумел бы Дирак связать неопределенность ΔP_x с неопределенностью ΔV_x, принципиально неправильно считать, что из равенства $\Delta V_x = \varsigma$ следует равенство $V_x = \pm\varsigma$. Дираковские равенства $|P_x| = \Delta P_x$; $|V_x| = \Delta V_x$ невыводимы, они являются попросту следствием неправильной физической интерпретации соотношения неопределенностей Гайзенберга.

5.4. Очередные заблуждения

Забудем на время неряшливость в обозначениях и допустим, что Дирак имел в виду именно разумное выражение $\widehat{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \varsigma\cdot\widehat{\alpha}_x$. Посмотрим, что за этим последовало.

Во избежание недоразумений, целесообразно ввести «свое» обозначение X-проекции той величины, которая на самом деле является результирующей скоростью частицы, участвующей в двух движениях, одно из которых — вращение по собственной орбите. Пусть $\frac{dx}{dt} \equiv u_x$.

Итак, Дирак нашел, что частица обладает какой-то «странной» скоростью, поскольку выяснилось, что оператор скорости обладает «странными» свойствами:

$$\widehat{u}_x^2 = \widehat{u}_y^2 = \widehat{u}_z^2 = \varsigma^2.$$

Казалось бы, теперь следует немедленно организовать проверку на «ускорение», для чего вычислить оператор.

$$\widehat{\vec{a}} = \widehat{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) \cdot \left(\widehat{\vec{u}}\widehat{H}_{Д} - \widehat{H}_{Д}\widehat{\vec{u}}\right).$$

Увы! Для Дирака не существует этого выражения, содержащего ***три*** оператора ($\widehat{\vec{a}}$, $\widehat{\vec{u}}$, $\widehat{H}_{Д}$), а существует лишь «уравнение», содержащее ***два*** оператора, один из которых это $\widehat{H}_{Д}$, а другой служит неизвестной величиной. Но этот последний — не оператор ускорения, а, увы, оператор скорости ($\widehat{\vec{u}} = \varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}}$). Физической характеристики, которую можно было бы обозначить символом $\varsigma \cdot \vec{\alpha}$ для Дирака тоже не существует, ибо он ввел именно ***оператор*** $\widehat{\vec{\alpha}}$ — чисто математическую конструкцию, — причем даже не ради того, чтобы сделать уравнение состояния лоренц-инвариантным. И речи не было о физической характеристике точечной частицы, в соответствие которой (характеристике), согласно принципу соответствия, необходимо было ставить оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$. Но поразительно не только это. Нигде на страницах книги Дирака не найти выражения вида

$$\widehat{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) \cdot \left(\widehat{\nu}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\nu}\right),$$

применив которое в обсуждаемой ситуации, волей-неволей ***пришлось*** бы написать

$$\widehat{\left(\frac{d\alpha_x}{dt}\right)} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) \cdot \left(\widehat{\alpha}_x\widehat{H}_{Д} - \widehat{H}_{Д}\widehat{\alpha}_x\right).$$

А уж это выражение ***заставило*** бы задуматься над тем, какая физическая характеристика прячется за символом α_x. Ведь $\widehat{\left(\frac{d\alpha_x}{dt}\right)}$ — это оператор величины $\frac{d\alpha_x}{dt}$ (то есть величины, являющейся производной от величины α_x), тогда как $\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}$ есть производная оператора $\widehat{\alpha}_x$.

Совершенно ясно, что вслед за обращением Дирака к «уравнению»

$$\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right) = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{\alpha}_x\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}\widehat{\alpha}_x\right) \tag{65}$$

не могла не последовать роковая ошибка, о которой шла речь на с. 55–56. Так оно и произошло: Дирак подставил в правую часть ***уже известные*** операторы $\widehat{\alpha}_x$ и $\widehat{H}_{\text{Д}}$, что позволило вычислить скобку и тем самым превратить псевдоуравнение в уравнение решаемое, но не имеющее никакого отношения к физике. А ведь решение «уравнения» (65) Дирак использовал для вычисления оператора $\widehat{x}$, поскольку считал, что имеет дело опять-таки с уравнением

$$\left(\frac{d\widehat{x}}{dt}\right) = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{x}\widehat{H}_{\text{Д}} - \widehat{H}_{\text{Д}}\widehat{x}\right) = \varsigma\cdot\widehat{\alpha}_x. \tag{66}$$

Это уравнение возникло из «уравнения» (54) после того, как в скобке оператор $\widehat{x}$ (а на самом деле там должен был быть оператор $\widehat{x}_H$) был по неряшливости подменен X-координатой, что и позволило скобку вычислить.

Решение уравнения (66) имеет вид:

$$\widehat{x} = \varsigma\cdot\int\widehat{\alpha}_x(t)\cdot dt, \tag{67}$$

а зависимость $\widehat{\alpha}_x(t)$ Дирак нашел, решив «уравнение» (65), которое (так же, как и (66)) после вычисления скобки приобрело вид настоящего уравнения:

$$\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right) = -\left(\frac{2i}{\hbar}\right)\cdot\left(\widehat{\alpha}_x - \varsigma\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_{\text{Д}}^{-1}\right)\widehat{H}_{\text{Д}}. \tag{68}$$

Положив

$$\int\frac{d\widehat{\alpha}_x}{\widehat{\alpha}_x - \varsigma\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_{\text{Д}}^{-1}} = -\left(\frac{2i\cdot\widehat{H}_{\text{Д}}}{\hbar}\right)\int dt \;{}^{18)},$$

легко найти решение:

$$\widehat{\alpha}_x(t) = \widehat{\alpha}_{x,0}\exp\left[\frac{-2i\cdot t\cdot\widehat{H}_{\text{Д}}}{\hbar}\right] + \varsigma\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_{\text{Д}}^{-1}, \tag{69, a}$$

где $\widehat{\alpha}_{x,0}$ — постоянная интегрирования.

[18)] Оба интеграла — табличные. Кроме того $\widehat{H}_{\text{Д}}t = t\cdot\widehat{H}_{\text{Д}}$.

Тем не менее Дирак приходит к установлению вида зависимости $\widehat{\alpha}_x(t)$ довольно странным путем. Сначала он дифференцирует уравнение (68) по времени t (считая операторы $\widehat{P}_x$ и $\widehat{H}_Д$ не зависящими от t) и получает:

$$\left(\frac{d^2\widehat{\alpha}_x}{dt^2}\right) = -\left(\frac{2i}{\hbar}\right)\cdot\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)\widehat{H}_Д.$$

Потом тут же интегрирует полученное уравнение и получает:

$$\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right) = \left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)_0 \exp\left[\frac{-2i\cdot\widehat{H}_Д t}{\hbar}\right], \qquad (69,б)$$

где $\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)_0$ — постоянная интегрирования. Далее зачем-то подставляет решение (69, б) в исходное уравнение (68), получая, наконец, свое окончательное решение в виде

$$\widehat{\alpha}_x(t) = \left(\frac{i\cdot\hbar}{2}\right)\cdot\left\{\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)_0 \exp\left[\frac{-2i\cdot t\cdot\widehat{H}_Д}{\hbar}\right]\right\}\widehat{H}_Д^{-1} + \varsigma\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_Д^{-1},$$

на первый взгляд отличающимся от (69, а). Однако ничто не мешает положить

$$\left(i\cdot\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)_0 \widehat{H}_Д^{-1} \equiv \widehat{\alpha}_{x,0},$$

а, учитывая, что $\widehat{H}_Д t = t\cdot\widehat{H}_Д$ и

$$\exp\left[-2i\cdot t\cdot\frac{\widehat{H}_Д}{\hbar}\right]\widehat{H}_Д = \widehat{H}_Д \exp\left[-2i\cdot t\cdot\frac{\widehat{H}_Д}{\hbar}\right],$$

можно написать:

$$\widehat{\alpha}_x(t) = \left\{\left(i\cdot\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)_0 \widehat{H}_Д^{-1}\right\} e^{-2i\cdot t\cdot\frac{\widehat{H}_Д}{\hbar}} + \varsigma\cdot\widehat{P}_x\cdot\widehat{H}_Д^{-1}. \qquad (69,в)$$

Величина в фигурных скобках в решении (69, в) и величина $\widehat{\alpha}_{x,0}$ в решении (69, а) — это один и тот же оператор.

Итак, пусть каким-то странным способом, но зависимость $\widehat{\alpha}_x$ от t. Дирак нашел, и можно, наконец, перейти к вычислению оператора $\widehat{x}$:

$$\widehat{x}(t)=\varsigma\cdot\int\widehat{\alpha}_x(t)dt=\widehat{x}_0+\left(i\cdot\varsigma\cdot\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\widehat{\alpha}_{x,0}\, e^{-2i\cdot t\cdot\frac{\widehat{H}_Д}{\hbar}}\widehat{H}_Д^{-1}+\varsigma^2\cdot t\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_Д^{-1}. \qquad (70)$$

Но на этом все неожиданно кончается. Обсуждению выражения (70) посвящены последние две фразы § 69 книги Дирака, но они таковы: «*Осциллирующая часть координаты x мала. В самом деле, ...она равна*

$$-\left(\varsigma\cdot\frac{\hbar^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{d\widehat{\alpha}_x}{dt}\right)_0\widehat{H}_{Д}^{-2}\exp\left[-2i\cdot t\cdot\frac{\widehat{H}_{Д}}{\hbar}\right]=$$

$$=\left(i\cdot\varsigma\cdot\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\widehat{\alpha}_{x,0}\exp\left[-2i\cdot t\cdot\frac{\widehat{H}_{Д}}{\hbar}\right]=$$

$$=\left(i\cdot\varsigma\cdot\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\left(\widehat{\alpha}_x(t)-\varsigma\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_{Д}^{-1}\right)\widehat{H}_{Д}^{-1},\qquad(71)$$

что имеет порядок величины $\left(\frac{\hbar}{2m\cdot\varsigma}\right)$, *так как величина* $(\widehat{\alpha}_x(t)-$ $-\varsigma\cdot\widehat{P}_x\widehat{H}_{Д}^{-1})$ *порядка единицы*».

Не будем придираться к несоответствию слов и формул (это очередное следствие все той же неряшливости в обозначениях)[19]. Пусть оказалось, что «*осциллирующая часть координаты мала*». Но по сравнению с чем, и что из этого следует? Увы, то были две ***последние*** фразы.

В заключение я возвращаю читателя к с. 46, на которой (в сноске) обещал доказать, что ни Дирак, никто другой не назвал той физической характеристики частицы, которой был поставлен в соответствие оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$ (равно как и оператор $\widehat{\beta}$).

Прежде всего, оператор $\widehat{\vec{\alpha}}$ (как и $\widehat{\beta}$) был введен Дираком вовсе не ради придания уравнению состояния свойства лоренц-инвариантности. Впоследствии из-за «компенсации» одной ошибки другой ошибкой[20]. оказалось, что оператор $\varsigma\cdot\widehat{\vec{\alpha}}$ допустимо отождествить с оператором мгновенной скорости частицы — величины $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, значение которой при этом оказалось равным $\pm\varsigma$. Тем не менее этот результат математического расчета не получил никакого физического истолкования. Более того, всячески давалось понять, что мгновенная скорость, оказавшаяся принимающей только два значения $\pm\varsigma$, — величина реально не наблю-

---

[19] Конструкция (71) — это не осциллирующая часть координаты, а уж во всяком случае, *оператор* этой части координаты, причем такой оператор, у которого нет собственного значения, каковое могло бы оказаться равным $\left(\frac{\hbar}{2m\cdot\varsigma}\right)$.

На самом деле величине $\left(\frac{\hbar}{2m\cdot\varsigma}\right)^2$ равен *квадрат модуля* проекции оператора радиус-вектора собственной орбиты частицы, центр которой (центр инерции точечной частицы) обладает импульсом $\vec{P}$.

[20] Допущенной также вследствие неряшливости в обозначениях.

даемая; называя вещи своими именами, величина фиктивная[21], то есть такая, какой у частицы на самом деле быть не может.

Наконец, все расчеты, якобы доказывающие существование колебаний мгновенной скорости и пространственных осцилляций самой частицы, оказались ложными. Об ускорении, испытываемом частицей, о том, что даже не обладая импульсом $\vec{P}$, она вращается по «собственной» орбите определенного радиуса речь вообще не заходила.

Напоследок я приведу две цитаты из уже упоминавшейся на с. 46 (в сноске) книги Г. Бёте. В связи с выражением (54), которое он, подобно Дираку, считал подлинным дифференциальным уравнением, Бёте утверждает: «*Из этой формулы следует, что релятивистская частица со спином* $\frac{1}{2}$ *совершает сложное движение. Оно складывается из усредненного* (? — *Ф. В.*) *трансляционного движения* (а на самом деле — любого, характеризуемого скоростью, равной $\left(\dfrac{\vec{P}}{m(P)}\right)$. — *Ф. В.*), *на которое накладывается колебательное. Шрёдингер назвал его Zitterbewegung* (*дрожательное движение*)».

Далее Г. Бёте приводит выражение (70) и пишет: «"*Дрожательное движение" представляет собой колебание с частотой..., которая равна по меньшей мере* $\left(\dfrac{2m_0 \cdot ç^2}{\hbar}\right)$, *то есть очень велика. Конечно его нельзя наблюдать ни в каком реальном эксперименте*»[22].

Нельзя не отметить, что последняя фраза полностью противоречит неоспоримому для Дирака, Бёте и многих других грандов теоретической физики «принципу наблюдаемости», согласно которому физическая теория не должна содержать ненаблюдаемых величин.

[21] По терминологии Дирака это — «*теоретическая*» скорость, отличающаяся от реальной — измеримой, — оператор которой равен $ç^2 \cdot \widehat{P}_x \widehat{H}_Д^{-1}$.

Следует иметь в виду, что Дирак придерживался принципа наблюдаемости, согласно которому, ненаблюдаемое (то есть не могущее быть измеренным) и несуществующее — это одно и то же.

[22] *Г. Бёте.* Квантовая механика. М.: Мир, 1965, с. 255, 256.

Глава 6

Происхождение уравнения Дирака

6.1. Принцип соответствия

Принцип соответствия относится к числу нескольких фундаментальных постулатов, на которых основана квантовая механика. Сводится этот принцип к выполнению определенных действий.

1. *Написать адекватное реальной ситуации* ***доквантовое*** *соотношение, связывающее друг с другом физические характеристики частицы.* Далее в качестве примера будет фигурировать дорелятивистское соотношение между полной энергией свободной точечной частицы и всеми остальными ее характеристиками:

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0} = \frac{1}{2m_0} \cdot \vec{P}^2. \tag{72}$$

2. *Заменить соотношение* (72) *операторным уравнением в* ***символической*** форме:

$$\widehat{E}\Psi = \frac{1}{2m_0} \cdot \widehat{\vec{P}}^2\Psi. \tag{73}$$

3. *Выбрать представление, в котором операторы физических величин приобретают явный вид, и подставить их в уравнение* (73).

В часто используемом пространственно-временном представлении:
оператор момента вечности $\widehat{t} \equiv t$;
оператор полной энергии $\widehat{E} \equiv i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$;
оператор радиус-вектора точки пространства

$$\widehat{\vec{r}} \equiv \vec{r} = \vec{e}_x \cdot x + \vec{e}_y \cdot y + \vec{e}_z \cdot z;$$

оператор импульса

$$\widehat{\vec{P}} \equiv -i \cdot \hbar \cdot \left\{\vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}.$$

Операторы массы движения, орбитального механического момента $\vec{L}$, мгновенно-локальной скорости точечной частицы являются функциями операторов $\widehat{\vec{r}}$ и $\widehat{\vec{P}}$[1]; операторы характеристик-констант (массы

[1] Например, соотношение $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$, согласно принципу соответствия, заменяется соотношением $\widehat{\vec{L}} = \widehat{\vec{r}} \times \widehat{\vec{P}}$.

покоя и электрического заряда частицы) тождественны самим этим характеристикам в любом представлении. Это же касается и универсальных («мировых») констант, к числу которых традиционно относят постоянную Планка, скорость света, электрическую постоянную пустого пространства и т. п.

6.2. Дираковский способ конструирования уравнения состояния свободной точечной частицы

Обратимся к предложенному в качестве примера доквантовому и дорелятивистскому соотношению $E = \frac{(\vec{P})^2}{2m_0}$, которое, согласно принципу соответствия, преобразуется в квантовое дорелятивистское уравнение состояния точечной свободной частицы

$$i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t}\right) = \left(\frac{1}{2m_0}\right) \cdot \hat{\vec{P}}^2 \Psi = = -\left(\frac{\hbar^2}{2m_0}\right) \cdot \left\{\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)\right\}. \quad (74)$$

К этому уравнению, разумеется, следует добавить одно начальное и два граничных условия, отображающих реальную обстановку, в которой пребывает частица, считающаяся свободной. Однако конкретно с уравнением (74) возникает другая проблема: оно не является инвариантным ни относительно преобразований Галилея, ни Лоренца, а, значит, не согласуется со священным для физики принципом относительности.

Принято считать (и это подтверждается экспериментами), что уравнение состояния (как, впрочем, и любое соотношение между физическими характеристиками частицы), претендующее на статус закона природы, должно быть инвариантным относительно преобразований именно лоренцевой группы формул преобразования[2)].

[2)] Принцип относительности по Эйнштейну включает в себя признание зависимости массы m от модуля импульса $\vec{P}$; признание величины $\frac{P}{m(P)}$ ограниченной сверху значением c; признание именно лоренцевой группы формул преобразования физических характеристик.

Принцип относительности по Галилею включает в себя признание независимости массы от импульса и неограниченности сверху величины $\frac{P}{m_0}$; признание именно галилеевой группы формул преобразования физических характеристик.

Здесь речь идет о формулах, по которым физические характеристики преобразуются при переходе от одной системы отсчета $\{X_j, Y_j, Z_j, t_j\}$ к другой $\{X_k, Y_k, Z_k, t_k\}$ при условии, что системы эти движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, например, вдоль общей X-оси со скоростью V_o. Такие две системы называют инерциальными, и формулы преобразования лоренцевой группы выглядят в только что упомянутом примере следующим образом:

$$t_j = \eta \cdot \left(t_k - \left(\frac{V_0}{\varsigma^2}\right) \cdot x_k\right)$$

(здесь и далее: $\eta \equiv \left(1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2\right)^{-1/2}$, причем и V_0, и ς — ***константы*** преобразования; момент совпадения начал обеих систем координат (вечно движущихся друг относительно друга) считается общим для обеих систем началом отсчета времени);

$$t_k = \eta \cdot \left(t_j + \left(\frac{V_0}{\varsigma^2}\right) \cdot x_k\right);$$

$$x_j = \eta \cdot (x_k - V_0 \cdot t_k), \quad y_j = y_k, \quad z_j = z_k;$$

$$x_k = \eta \cdot (x_j + V_0 \cdot t_j); \quad E_j = \eta \cdot (E_k - V_0 \cdot P_{k,x});$$

$$P_{j,x} = \eta \cdot \left(P_{k,x} - \left(\frac{V_0}{\varsigma^2}\right) \cdot E_k\right), \quad P_{j,y} = P_{k,y}, \quad P_{j,z} = P_{k,z};$$

$$V_{j,x} = \frac{V_{k,x} - V_0}{1 - \left(\frac{V_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}\right)}; \quad V_{j,y} = \frac{V_{k,y}}{\eta \cdot \left\{1 - \left(\frac{V_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}\right)\right\}}; \quad V_{j,z} = \frac{V_{k,z}}{\eta \cdot \left\{1 - \left(\frac{V_{k,x} \cdot V_0}{\varsigma^2}\right)\right\}};$$

причем следует помнить, что если речь идет о свободной частице, то:

$$\vec{V}_{\text{мгн-лок}} = \langle \vec{V} \rangle \equiv \vec{V} (= \vec{e}_x \cdot V_x + \vec{e}_y \cdot V_y + \vec{e}_z \cdot V_z).$$

Согласно принципу соответствия, формулы преобразования ***операторов*** всех перечисленных величин и ***самих величин*** должны быть идентичными. Тогда:

$$\widehat{E}_j = i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) = \eta \cdot i \cdot \hbar \cdot \left\{\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) + V_0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right\} = \eta \cdot (\widehat{E}_k - V_0 \cdot \widehat{P}_{k,x});$$

$$\widehat{P}_{j,x} = -i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\eta \cdot i \cdot \hbar \cdot \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{V_0}{\varsigma^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right\} =$$

$$= \eta \cdot \left\{\widehat{P}_{k,x} - \left(\frac{V_0}{\varsigma^2}\right) \cdot \widehat{E}_k\right\}^{3)}.$$

Чтобы сконструировать лоренц-инвариантное уравнение состояния свободной точечной частицы, действуя в рамках принципа соответствия, нужно сначала обратиться к формуле Эйнштейна, которая уже приводилась в гл. 2 и которую можно представить в любой форме из приведенных ниже:

$$E = \begin{cases} \varsigma \cdot \sqrt{\left(\vec{P}\right)^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}; & (10,\text{а}) \\ \dfrac{(\vec{P})^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}{m(P)}. & (10,\text{б}) \end{cases}$$

Для преобразования в уравнение состояния годится любое из выражений (10), но, чтобы иметь возможность в дальнейшем проводить сравнение, следует выбрать (10, а) — то, которое выбрал Дирак.

Теперь нужно перейти к символическому уравнению

$$\widehat{E}\Psi = \left\{\varsigma \cdot \sqrt{(\widehat{\vec{P}})^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2}\right\}\Psi$$

и выбрать представление, в котором операторы $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$ приобрели бы явный вид. В пространственно-временном представлении:

$$\widehat{E} = i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right); \quad \widehat{\vec{P}} = -i \cdot \hbar \cdot \left\{\vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}.$$

Что касается характеристики-константы m_0, то $\widehat{m}_0 = m_0$ в любом представлении, а как быть с величиной ς?

---

[3] С учетом соотношений между величинами t_j, x_j и величинами t_k, x_k следовало бы написать, например:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) \cdot \left(\frac{\partial t_k}{\partial t_j}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_k}{\partial t_j}\right) =$$

$$= \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{dx_j}{dt_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) + \eta \cdot \left(V_0 + \frac{dx_j}{dt_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

Однако в рамках квантового описания состояния точечной частицы не существует кинематического определения мгновенной скорости. То есть нельзя считать, что $\frac{dx_j}{dt_j} = V_{j,x}$. Приходится считать, что x_j и t_j это две ***независимые*** переменные. Поэтому:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k}\right); \quad \frac{\partial}{\partial t_j} = \eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k} + V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

После умножения на $(-i \cdot \hbar)$ и $(i \cdot \hbar)$ соответственно получаются формулы преобразования операторов $\widehat{P}_x \left(\equiv -i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $\widehat{E} \left(\equiv i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Дирак не сомневался в том, что это — просто универсальная («мировая») константа, и потому, положив $\widehat{\varsigma} \equiv \varsigma$, написал:

$$i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \left(\varsigma \cdot \sqrt{(m_0 \cdot \varsigma)^2 - \hbar^2 \cdot \left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}}\right) \Psi. \quad (75)$$

Хотя и создается впечатление, что, по крайней мере пока, все сделанное еще остается в рамках принципа соответствия, на самом деле уже совершена фатальная ошибка. Величина, присутствующая в формулах (10) и обозначенная символом ς, — как мы-то теперь знаем, — никакая не константа, и ей в соответствие необходимо было тоже ставить оператор. Но для этого нужно было во всех деталях представлять себе характер движения свободной точечной частицы.

Однако, полагая, что свободная частица может двигаться только прямолинейно и равномерно, Дирак естественно посчитал величину, обозначенную символом ς, просто константой[4] и, опираясь далее на принцип соответствия, пришел к операторному уравнению (75). Конечно, правая часть его выглядит очень странно. Понятно, что означает операция, например, $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)$, но операция $\left(\sqrt{(m_0 \cdot \varsigma)^2 - \hbar^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)}\right) \Psi$, если ее понимать буквально, математически бессодержательна.

Хотя уравнение (75) казалось Дираку совершенно правильным, на том основании, что было получено с помощью математических операций, оно ему все же не понравилось. Но, — по весьма странной причине: «*Оно столь несимметрично относительно $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$, что невозможно обобщить его на случай, когда имеется поле. Мы должны, поэтому, искать другое уравнение*»[5]. Вслед за тем Дирак предложил попросту ***заменить*** уравнение (75) таким, которое, судя по сказанному им, очевидно, должно допускать обобщение на случай взаимодействия частицы с полем. Вот так Дирак и написал:

$$\widehat{E}\Psi = i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \varsigma \cdot \left\{\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + (m_0 \cdot \varsigma) \cdot \widehat{\beta}\right\} \Psi, \quad (76)$$

---

[4] На тот факт, что формула Эйнштейна продолжает оставаться неинтерпретированной, ни Дирак, никто другой внимания так и не обратили.

[5] *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960, с. 352. Здесь принято обозначение $\widehat{E}$ вместо используемого Дираком обозначения $\widehat{P}_0$.

где $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ — по крайней мере на этом этапе — всего лишь *некие* операторы (неизвестно каким физическим характеристикам отвечающие).

Однако, согласитесь, ***заменить*** одно уравнение другим — отнюдь не значит ***вывести***. Поэтому совершенно справедливо замечание, которое со свойственной ему непринужденностью сделал когда-то Р. Фейнман: «*Вид релятивистского гамильтониана* (то есть правой части уравнения (76). — *Ф. В.*) *Дирак просто угадал*»[6]. Более респектабельные Великие мира физики, осведомленные, каким путем пришел Дирак к своему уравнению, ограничились замечанием, что «*оно не подчиняется принципу соответствия*». Действительно, если считать величину ς некоей универсальной константой, то, руководствуясь принципом соответствия, из соотношения (10, а) можно вывести только математически бессодержательное «уравнение» (75), но не уравнение (76).

Тем не менее, перечисленные замечания носят характер констатаций. Давайте лучше вчитаемся в первую из двух процитированных выше дираковских фраз. В чем усмотрел Дирак несимметрию? Вряд ли можно сомневаться, что только в расположении операторов $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$. Последний присутствует под знаком корня (естественно, что в степени 2), а оператор $\widehat{E}$ — вне корня. Но, при чем тут поле, если речь идет о частице свободной? Ведь соотношение

$$E = \varsigma \cdot \sqrt{\left(\vec{P}\right)^2 + (m_0\varsigma)^2}$$

относится только к свободной частице.

Думается, что истинная причина недовольства Дирака — в упоминавшейся выше математической бессодержательности операций типа

$$\left(\sqrt{(m_0 \cdot \varsigma)^2 - \hbar^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)}\right) \Psi.$$

Интересно, как бы отреагировал Дирак на предложение исходить из симметричного в его понимании соотношения $E = \varsigma \cdot |\vec{P}|$, к которому сводится формула Эйнштейна (10, а) для частицы, масса покоя которой равна нулю ($m_0 = 0$)? Неужели написал бы $\widehat{E}\Psi = \varsigma \cdot \widehat{|\vec{P}|}\Psi$, откуда после подстановки операторов в явном виде все-таки следует, что

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varsigma \cdot \widehat{|\vec{P}|}\Psi = i \cdot \hbar \cdot \dot{\varsigma} \cdot \left(\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right) \Psi\ ^{7)}.$$

---

[6] Ричард Фейнман — один из выдающихся физиков XX века. В книге «Характер физических законов» (М.: Мир, 1968, с. 57) Р. Фейнман написал: «Дирак... открыл правильные законы релятивистской квантовой механики, просто угадав уравнение».

Итак, Дирак как будто в самом деле угадал правильный вид релятивистского гамильтониана $\widehat{H}_Д$. Между тем в угадывании не было никакой необходимости. Давайте рассмотрим несколько очень простых примеров.

Обратимся сначала к конструкции $\sqrt{s^2 + n^2}$, в которой s и n — символы вещественных чисел. Если бы можно было представить $\left(s^2 + n^2\right)$ в виде

$$(S \cdot s + N \cdot n)^2,$$

(где S и N — символы других, тоже вещественных чисел), запросто удалось бы извлечь квадратный корень так, чтобы

$$\sqrt{s^2 + n^2} = \sqrt{(S \cdot s + N \cdot n)^2} = \pm\,(S \cdot s + N \cdot n)\,.$$

Однако равенство

$$\left(s^2 + n^2\right) = (S \cdot s + N \cdot n)^2 = S^2 \cdot s^2 + N^2 \cdot n^2 + 2 \cdot S \cdot N \cdot s \cdot n,$$

могло бы иметь место только при ***несовместимых*** условиях:

$$S^2 = N^2 = 1, \quad \text{но} \quad S \cdot N = 0.$$

Точно так же и равенство

$$s^2 + n^2 = \left(s \cdot \widehat{\Theta} + n\right)^2 = s^2 \cdot \widehat{\Theta}^2 + n^2 + 2 \cdot s \cdot n \cdot \widehat{\Theta},$$

где $\widehat{\Theta}$ — это уже оператор, могло бы иметь место только при ***несовместимых*** условиях: $\widehat{\Theta}^2 = 1$, но $\widehat{\Theta} = 0$.

И равенство

$$\left(s^2 + \widehat{\gamma}^2\right) = (s + n \cdot \widehat{\Theta})^2 = s^2 + n^2 \cdot \widehat{\Theta}^2 + 2 \cdot s \cdot n \cdot \widehat{\Theta}$$

также обставлено несовместимыми условиями:

$$n^2 \cdot \widehat{\Theta}^2 = \widehat{\gamma}^2, \quad \text{но} \quad \widehat{\Theta} = 0.$$

С другой стороны равенства

$$s^2 + n^2 = \left(\widehat{\Theta} + \widehat{\gamma}\right)^2 = \widehat{\gamma}^2 + \widehat{\Theta}^2 + \widehat{\gamma}\widehat{\Theta} + \widehat{\Theta}\widehat{\gamma};$$

$$s^2 + \widehat{\Theta}^2 = \left(\widehat{\Theta} + \widehat{\gamma}\right)^2 = \widehat{\gamma}^2 + \widehat{\Theta}^2 + \widehat{\gamma}\widehat{\Theta} + \widehat{\Theta}\widehat{\gamma};$$

$$\widehat{\gamma}^2 + \widehat{\Theta}^2 = \left(\widehat{\Theta} + \widehat{\gamma}\right)^2 = \widehat{\gamma}^2 + \widehat{\Theta}^2 + \widehat{\gamma}\widehat{\Theta} + \widehat{\Theta}\widehat{\gamma}$$

---

[7] Видно, что если положить $m_0 = 0$ непосредственно в уравнении Дирака (76), возникает совершенно другое уравнение:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\varsigma \cdot \left\{\widehat{\alpha}_x \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \widehat{\alpha}_y \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \widehat{\alpha}_z \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right\}.$$

вполне могут иметь место, ибо ***совместимы*** следующие соотношения:

$$\widehat{\gamma}^2 \neq 0; \quad \widehat{\Theta}^2 \neq 0, \quad \text{а} \quad \widehat{\gamma}\widehat{\Theta} + \widehat{\Theta}\widehat{\gamma} = 0 \quad (\text{см. с. } 40\text{–}41).$$

Таким образом, с точки зрения математики не было никакой проблемы в «симметризации» уравнения (75). Достаточно было написать

$$\sqrt{\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2} = \sqrt{\left(\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\vec{\nu}}\right)^2} = \pm \left(\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\vec{\nu}}\right),$$

потребовав, чтобы $\left(\widehat{\vec{P}}\widehat{\vec{\nu}} + \widehat{\vec{\nu}}\widehat{\vec{P}}\right) = 0$; $\widehat{\vec{\nu}}^2 = 1$.

Увы, уравнение состояния в виде

$$i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \pm\varsigma \cdot \left\{\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\vec{\nu}}\right\} \Psi$$

является, прежде всего, абсурдным: ***скалярный*** оператор $i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ не может быть равен ***векторному*** $\varsigma \cdot \left\{\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\vec{\nu}}\right\}$ [8]. Но даже если произвольно записать уравнение состояния в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\varsigma \cdot \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(i \cdot m_0 \cdot \frac{\varsigma}{\hbar}\right) \cdot \widehat{\beta}\right\} \Psi, \qquad (77)$$

оно не сможет претендовать на статус истинного, ибо ***не является*** лоренц-инвариантным.

Тем не менее, можно написать и так:

$$\sqrt{\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2} = \sqrt{\left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)^2} = \pm \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right),$$

потребовав, как это и сделал Дирак, чтобы:

$$\begin{gathered}
(\widehat{\alpha}_x)^2 = (\widehat{\alpha}_y)^2 = (\widehat{\alpha}_z)^2 = 1; \quad \widehat{\beta}^2 = 1; \\
\widehat{\alpha}_x\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha}_y\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_y = \widehat{\alpha}_z\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_z = 0; \\
\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y + \widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_z + \widehat{\alpha}_z\widehat{\alpha}_y = \widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_z + \widehat{\alpha}_z\widehat{\alpha}_x = 0; \\
\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} = \widehat{\vec{P}}\widehat{\vec{\alpha}}; \quad \widehat{\beta}\widehat{\vec{P}} = \widehat{\vec{P}}\widehat{\beta}.
\end{gathered} \qquad (78)$$

Получающееся в результате уравнение (76) оказывается лоренц-инвариантным.

---

[8] Следует обратить внимание на то, что оператор $\widehat{\vec{\nu}}$ по необходимости должен быть векторным. Иначе еще под корнем возникнет сумма векторной и скалярной операторных величин.

Очень легко убедиться в том, что уравнение (77) не является лоренц-инвариантным. Для этого достаточно воспользоваться приведенными в п. 6.2 формулами преобразований, помня, что, согласно принципу соответствия, операторы физических величин преобразуются так же, как и сами величины.

Положив[9]

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = \eta \cdot \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) + V_0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\}; \qquad (79,\text{а})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \eta \cdot \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \left(\frac{V_0}{\varsigma^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) \right\}; \qquad (79,\text{б})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_k}\,^{10)}, \qquad (79,\text{в, г})$$

и выразив в уравнении

$$i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t_j} \right) = -i \cdot \hbar \cdot \varsigma \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z_j} \right) \right\} + m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}_j \Psi$$

j-е величины (кроме $\widehat{\beta}_j$) через k-е, получим

$$\eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \right] \cdot \left\{ i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t_k} \right) \right\} =$$

$$= -i \cdot \hbar \cdot \varsigma \cdot \left\{ \eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \right] \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z_k} \right) \right\} + m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}_j \Psi.$$

Для сравнения напишем преобразованное таким же образом уравнение Дирака (76)[11]:

$$\eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{j,x} \right] \left\{ i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t_k} \right) \right\} =$$

$$= \varsigma \cdot \left\{ \eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{j,x} \right] \widehat{\alpha}_{j,x} \widehat{P}_{k,x} + \widehat{\alpha}_{j,y} \widehat{P}_{k,y} + \widehat{\alpha}_{j,z} \widehat{P}_{k,z} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}_j \right\} \Psi.$$

Видно, что присутствие в этом уравнении оператора $\widehat{\vec{\alpha}}$ дает возможность создать общий множитель $\eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_x \right]$, придумав (и, конечно,

[9] Предполагается, что j-я и k-я системы отсчета движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно вдоль общей X-оси со скоростью V_0.

[10] $-i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \widehat{P}_{j,x}$ и т. п.

[11] Здесь использовано одно из свойств оператора $\widehat{\alpha}_x$: $(\widehat{\alpha}_x)^2 = 1$, откуда следует, что $\widehat{\alpha}_x + \frac{V_0}{\varsigma} = \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_x \right] \widehat{\alpha}_x$.

обосновав) для оператора $\widehat{\vec{\alpha}}$ формулы преобразования:

$$\widehat{\alpha}_{k,x} = \widehat{\alpha}_{j,x}; \quad \widehat{\alpha}_{j,y} = \eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right] \widehat{\alpha}_{k,y}; \quad \widehat{\alpha}_{j,z} = \eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right] \widehat{\alpha}_{k,z}. \tag{80, а, б, в}$$

Тогда можно и для оператора $\widehat{\beta}$ придумать формулу преобразования:

$$\widehat{\beta}_j = \eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right] \widehat{\beta}_k, \tag{80, г}$$

после чего преобразованное уравнение Дирака примет вид:

$$\eta \cdot \left\{1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right\} \left\{i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t_k}\right)\right\} =$$

$$= \eta \cdot \left\{1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right\} \left\{\varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}_k \widehat{\vec{P}}_k + m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}_k\right)\right\} \Psi.$$

Сократив в нем обе части на $\eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right]$ или умножив обе части на $\eta \cdot \left[1 - \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right]$, получим уравнение, вид которого идентичен виду исходного уравнения.

Ясно, что в уравнении (77) множитель $\eta \cdot \left[1 + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \widehat{\alpha}_{k,x}\right]$ принципиально не может появиться перед операторами $\frac{\partial}{\partial y_k}$ и $\frac{\partial}{\partial z_k}$. Поэтому бесполезно придумывать формулу преобразования для оператора $\widehat{\beta}$, присутствующего в уравнении (77).

Итак, невзирая на несостоятельность своей аргументации, Дирак пришел к правильному, как потом оказалось, виду уравнения состояния свободной точечной частицы.

Тем не менее, дираковский способ перехода от исходного уравнения (75) к уравнению (76) порождает три проблемы.

Одна из них очевидная — придание математических свойств новым операторам $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ — и легко решаемая. Для этого достаточно потребовать реализации равенства

$$\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2 + (m_0 \cdot \varsigma)^2 = \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right) \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right). \tag{81}$$

Вторая проблема — чисто физическая — выявить те характеристики точечной частицы, которым просто ***обязаны*** соответствовать введенные операторы $\left(\varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}}\right)$ и $\left(m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}\right)$[12]. Необходимо принять во внимание, что от подобной задачи нельзя было уклоняться, ибо уравнение (76) было получено с помощью чисто математических операций — ***в обход*** принципа соответствия. Это обстоятельство порождает третью проблему — проверки уравнения состояния (76) на лоренц-инвариантность. Ведь свойства, которые Дирак придал операторам $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$, гарантировали только существование равенства (81). Поэтому логично, что, написав свое уравнение, Дирак сразу же решил проверить, *«действительно ли наша теория* (то есть, конечно, не теория, а уравнение. — *Ф. В.*) *инвариантна относительно преобразований Лоренца... Это ни в какой мере не является очевидным»*. В связи с проверкой на лоренц-инвариантность следует заметить, что она-то и дает ***единственный*** шанс установить те физические характеристики, которым должны соответствовать операторы $\left(\varsigma \cdot \widehat{\vec{\alpha}}\right)$ и $\left(m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}\right)$. Глядя на формулы преобразования операторов $(\varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x)$, $\left(\varsigma \cdot \widehat{\alpha}_y\right)$, $(\varsigma \cdot \widehat{\alpha}_z)$, $\left(m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}\right)$, естественно сравнить их с формулами преобразования различных физических величин, имея в виду, что, согласно принципу соответствия, формулы преобразования операторов величин и самих величин должны совпадать. Таким образом, в результате проверки уравнения (76) на лоренц-инвариантность оказалась бы решенной и вторая задача.

От решения второй проблемы Дирак и все остальные корифеи теоретической физики XX века уклонились. С точки зрения подавляющего большинства из них в этом не было, нет, и никогда не будет необходимости[13]. Ведь если явный вид всех четырех операторов $\left(\widehat{E}, \widehat{\vec{P}}, \widehat{\vec{\alpha}}, \widehat{\beta}\right)$ уже установлен, значит уравнение можно решить (если решение существует), после чего в нашем распоряжении окажется зависимость энергии свободной точечной частицы от ее импульса. Сравнив эту — теоретическую — зависимость с экспериментальной и не обнаружив расхождения, можно облегченно вздохнуть. Зачем еще спрашивать себя, почему введение в уравнение состояния абстрактных — чисто математических — величин приводит к столь замечательным результатам. Тем не менее, специалисты, разделяющие подобную точку зрения, по моему мнению, заслуживают большого уважения, ибо именно они разрабатывают адекватные методы описания даже самых

[12] От решения этой задачи Дирак и все остальные гранды теоретической физики уклонились. К сожалению, отказ от физической интерпретации математических соотношений и уравнений является достаточно распространенным явлением (см. гл. 2).

[13] Очень многие выдающиеся физики считали и считают, что *«такой вещи, как понимание явления природы не существует, есть только его описание»*.

экзотических явлений природы. А не располагая адекватным описанием, нельзя даже надеяться достичь понимания (объяснения явления). Сначала — описание, объяснение — потом.

Все же объяснение, на мой взгляд, столь же необходимо.

А теперь вернемся к первой проблеме.

Конечно, придать явный вид операторам $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$, выбрав пространственно-временное представление, не составляет труда. Но, как быть с операторами $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$, если считать, что это совершенно абстрактные — чисто математические — величины, отнюдь не соответствующие каким бы то ни было физическим характеристикам частицы? Что тогда нужно написать в правых частях выражений $\widehat{\alpha}_x = \ldots$, $\widehat{\alpha}_y = \ldots$, $\widehat{\alpha}_z = \ldots$, $\widehat{\beta} = \ldots$? Ответ приходит с совершенно неожиданной стороны.

Во-первых, чтобы иметь возможность приравнять скобку $\left(\widehat{\vec{\alpha}}\,\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)^2$ скобке $\left(\vec{P}^2 + m_0^2 \cdot \varsigma^2\right)$, Дираку пришлось ***постулировать*** соотношения (78). Во-вторых, коль скоро от операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ не требуется представлять физические характеристики, то не все ли равно, в какую именно функцию окажется преобразованной Ψ-функция в результате операций $\widehat{\alpha}_x\Psi$, $\widehat{\alpha}_y\Psi$, $\widehat{\alpha}_z\Psi$, $\widehat{\beta}\Psi$? А если — все равно, то давайте так прямо и скажем: годятся любые операции, лишь бы при этом не нарушались соотношения (78). Поясню на примере.

Пусть $\widehat{\alpha}_x\Psi = \Phi_x$, $\widehat{\alpha}_y\Psi = \Phi_y$. Тогда $\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y\Psi = \widehat{\alpha}_x\Phi_y$, $\widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x\Psi = \widehat{\alpha}_y\Phi_x$.

Совершенно неважно, на какие именно аргументы Ψ-функции воздействуют операторы и каким окажется явный вид Φ_x- и Φ_y-функций. Необходимо лишь, чтобы $\widehat{\alpha}_x\Phi_y + \widehat{\alpha}_y\Phi_x = \left(\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y + \widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x\right)\Psi = 0$.

В арсенале математики найдется немало операций, позволяющих при их выполнении соблюдать самые экзотические условия. Однако можно и не утруждать себя поисками того, что уже есть. Ведь это математика, так что не возбраняется придумать новые операции. Вот Дирак и предложил: пусть

$$\widehat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \widehat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\widehat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Читатель, знакомый с правилами перемножения и сложения матриц, без труда установит, что

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y + \widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Далее, вполне достаточно написать $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$, чтобы операция, например, $\widehat{\alpha}_x\Psi$ оказалась математически вполне корректной:

$$\widehat{\alpha}_x\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \\ \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} = \Phi_x.$$

Итак, с первой проблемой Дирак успешно справился — уравнение (76) обрело математическую содержательность. Добавив к нему соответствующие граничные и начальное условия, можно легко установить как вид зависимости Ψ от x, y, z, t, так и вид зависимости E от $\vec{P}$.

6.3. Дираковский способ «проверки» сконструированного уравнения состояния на лоренц-инвариантность

Имеет смысл сначала обсудить принципы проверки уравнения Дирака на лоренц-инвариантность.

Казалось бы, что в j-й системе отсчета уравнение должно выглядеть следующим образом:

$$\left\{ i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) - \varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}_j \widehat{\vec{P}}_j + (m_0 \cdot \varsigma) \cdot \widehat{\beta}_j \right) \right\} \Psi = 0 \qquad (82, \text{a})$$

Индекс j необходим, поскольку явный вид может быть придан операторам только в определенной — j-й системе отсчета. Символом Ψ обозначена неизвестная величина — решение уравнения (82, а), которое еще только предстоит найти.

Проверка уравнения на лоренц-инвариантность состоит в том, чтобы, выразив все j-величины в фигурной скобке через k-величины, посмотреть, примет после того преобразованное уравнение вид

$$\left\{i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) - ç \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}_k \widehat{\vec{P}}_k + (m_0 \cdot ç) \cdot \widehat{\beta}_k\right)\right\} \Psi = 0$$

или нет.

Таким образом, само понятие проверки можно считать логически содержательным лишь при условии, что формулы преобразования всех без исключения операторов известны ***заранее.***

Формулы преобразования дифференцирующих операторов (величин $\frac{\partial}{\partial t}$; $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}$; $\frac{\partial}{\partial z}$) действительно известны, это формулы (79, а–г). Но откуда взяться формулам преобразования $\widehat{\vec{\alpha}}$- и $\widehat{\beta}$-операторов, коль скоро они введены в уравнение в качестве чисто математических понятий, которые и не должны соответствовать физическим характеристикам.

Но это еще не все. Допустим, что кто-то предложил некие формулы преобразования $\widehat{\vec{\alpha}}_j$ в $\widehat{\vec{\alpha}}_k$ и $\widehat{\beta}_j$ в $\widehat{\beta}_k$, исходя из требования, чтобы после этого соотношения между k-операторами имели тот же вид (78), что и между j-операторами. Однако даже на этом основании нельзя признать предложенные формулы принадлежащими именно лоренцевой группе. Ведь упомянутые соотношения были придуманы вовсе не ради придания уравнению (76) лоренц-инвариантности.

Чтобы понять весь ход традиционного — дираковского — способа проверки лоренц-инвариантности уравнения Дирака, необходимо прежде всего обратить внимание на то, в каком виде представил Дирак свое уравнение:

$$\left\{i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) - ç \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}} \widehat{\vec{P}}_j + (m_0 \cdot ç) \cdot \widehat{\beta}\right)\right\} \Psi_j = 0. \tag{82, б}$$

Здесь я вынужден сделать два замечания.

1. Лишение операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ нижнего индекса автоматически означает недопустимость подвергать их какому-либо преобразованию при переносе уравнения из j-й системы отсчета в k-ю. (Я думаю, что Дирак и не собирался это делать, считая упомянутые операторы чисто математическими величинами.)

2. Ψ-функции нижний индекс приписан с явным намерением подвергнуть ее лоренц-преобразованию. Но ведь это — совершенно бессмысленное занятие. В самом деле, что может означать индекс j у Ψ-функции? Ясно же, что если в уравнении присутствуют только j-переменные, то и решение его (Ψ-функция) не может зависеть

от k-переменных, l-переменных и т. п. Что же касается самого ***вида*** (структуры, характера) зависимости Ψ от своих аргументов, то вид этот определяется исключительно видом (структурой) полного оператора $\{\widehat{\ldots}\}$, действующего на Ψ-функцию.

Приведу простой пример. Пусть $\left\{\frac{d}{dx}-1\right\}\Psi=0$. Тогда $\Psi=A\cdot e^{x}$. Но если уравнение представить в виде $\left\{\frac{d}{dx}-1\right\}\Psi_j=0$, то вид решения, конечно, не изменится: $\Psi_j=A\cdot e^{x}$.

Таким образом, лоренц-преобразованию должен и может быть подвергнут только полный оператор, но не Ψ-функция.

Теперь пора вернуться к анализу традиционного способа проверки уравнения Дирака на лоренц-инвариантность.

Первое, с чего все начинают, — выражают дифференцирующие j-операторы через k-операторы, используя заведомо принадлежащие лоренцевой группе формулы преобразования (79). После этого фигурная скобка в уравнении (82, б) принимает вид

$$\left\{\left(i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}-\varsigma\cdot\widehat{\alpha}_x\widehat{P}_{k,x}\right)\left[\eta\cdot\left(1+\frac{V_0}{c}\cdot\widehat{\alpha}_x\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\varsigma\cdot\left(\widehat{\alpha}_y\widehat{P}_{k,y}+\widehat{\alpha}_z\widehat{P}_{k,z}+m_0\cdot\varsigma\cdot\widehat{\beta}\right)\right\}\equiv\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\} \qquad (83,\text{а})$$

(символ $\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\}$ призван попросту заменить в последующих выкладках громоздкую конструкцию). Само же уравнение выглядит следующим образом:

$$\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\}\Psi_j=0. \qquad (84,\text{а})$$

Далее, используя так называемые унитарные операторы, удовлетворяющие соотношению

$$\widehat{\cup}\widehat{\cap}=1, \qquad (85)$$

все выполняют очередное — весьма специфическое преобразование уравнения (84, а). Последнее сначала представляют в виде

$$\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\}\Psi_j=\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\}\left(\widehat{\cup}\widehat{\cap}\right)\Psi_j=\left[\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\}\widehat{\cup}\right]\left(\widehat{\cap}\Psi_j\right)=0, \qquad (84,\text{б})$$

после чего требуют, чтобы в результате действия оператора $\left\{\widehat{\mathrm{K}}_1\right\}$ на оператор $\widehat{\cup}$ возник такой оператор, который можно было бы представить в виде $\widehat{\cap}\left\{\widehat{\mathrm{K}}_2\right\}$ с условием, что оператор $\left\{\widehat{\mathrm{K}}_2\right\}$ будет иметь именно желанный вид:

$$\left\{\widehat{\mathrm{K}}_2\right\}=\left\{i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}-\varsigma\cdot\left(\widehat{\alpha}_x\widehat{P}_{k,x}+\widehat{\alpha}_y\widehat{P}_{k,y}+\widehat{\alpha}_z\widehat{P}_{k,z}+m_0\cdot\varsigma\cdot\widehat{\beta}\right)\right\}. \qquad (83,\text{б})$$

Другими словами, ***требуют***, чтобы $\{\widehat{K}_1\}\widehat{U} = \widehat{\Pi}\{\widehat{K}_2\}$.

(А, что же тогда собираются проверять?).

Далее все ***требуют*** считать, что $(\widehat{\Pi}\Psi_j) = \Psi_k$, после чего представляют уравнение (84, б) в виде

$$\widehat{\Pi}\{\widehat{K}_2\}\Psi_k = 0 \text{ [14]}. \tag{84, в}$$

Глядя на это уравнение и соглашаясь с тем, что оператор $\{\widehat{K}_2\}$ имеет вид (83, б), становится очевидным, что остается избавиться в уравнении (84, в) от оператора $\widehat{\Pi}$. Сделать это очень легко, поскольку вместе с оператором $\widehat{\Pi}$ обязательно существует и обратный ему оператор $\widehat{U}$ (см. выражение (85)). Соответствующая операция такова:

$$\widehat{U}\left[\widehat{\Pi}\{\widehat{K}_2\}\Psi_k\right] = \widehat{U}\widehat{\Pi}\left[\{\widehat{K}_2\}\Psi_k\right] = \{\widehat{K}_2\}\Psi_k = 0.$$

(Поскольку $\widehat{\Pi}\{\widehat{K}_2\}\Psi_k = 0$, действие любого оператора на $\left[\widehat{\Pi}\{\widehat{K}_2\}\Psi_k\right]$ оставляет эту величину равной нулю).

Итак, проверка уравнения Дирака на лоренц-инвариантность завершена. Оказалось, что уравнение Дирака в k-й системе отсчета выглядит точно так же, как в j-й:

$$\{\widehat{K}_2\}\Psi_k = \left\{i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t_k} - \varsigma\cdot\left(\widehat{\alpha}_x\widehat{P}_{k,x} + \widehat{\alpha}_y\widehat{P}_{k,y} + \widehat{\alpha}_z\widehat{P}_{k,z} + m_0\cdot\varsigma\cdot\widehat{\beta}\right)\right\}\Psi_k = 0.$$

Ниже приведена последовательность ***традиционных*** действий, выполняемых после лоренц-преобразования одних лишь дифференцирующих операторов (преобразования, приведшего к формуле $\{\widehat{K}_1\}\Psi_j = 0$):

1) $\{\widehat{K}_1\}(\widehat{U}\widehat{\Pi})\Psi_j = 0$, 2) $\left[\{\widehat{K}_1\}\widehat{U}\right](\widehat{\Pi}\Psi_j) = 0$,

3) $\left[\{\widehat{K}_1\}\widehat{U}\right]\Psi_k = 0$, 4) $\left(\widehat{U}\{\widehat{K}_1\}\widehat{U}\right)\Psi_k = \{\widehat{K}_2\}\Psi_k = 0$.

Так как присвоение индекса k Ψ-функции никакой роли не играет, ясно, что после лоренц-преобразования дифференцирующих операторов на самом деле выполняется еще и ***ничем не обоснованное*** преобразование оператора $\{\widehat{K}_1\}$ в виде:

$$\widehat{U}\{\widehat{K}_1\}\widehat{U} \Rightarrow \{\widehat{K}_2\}. \tag{86}$$

Я рискну назвать подобное преобразование *псевдоунитарным*[15].

[14] Я уже отмечал, что приписывать нижний индекс Ψ-функции — совершенно бессмысленная затея. А вот Дирак подчеркнул (на с. 358 в своей книге «Принципы квантовой механики»), что его уравнение *«инвариантно относительно... преобразования Лоренца при условии, что Ψ преобразуется по правилу $\Psi_k = \widehat{\Pi}\Psi_j$»*.

[15] В квантовой механике используется так называемое унитарное преобразование, которое выглядит следующим образом: $\widehat{U}\widehat{\Omega}\widehat{\Pi} = \widehat{\mho}$. Здесь: $\widehat{\Omega}$ — исходный оператор

Если сравнить явный вид операторов $\{\widehat{K}_1\}$ и $\{\widehat{K}_2\}$, не остается сомнений, что ***единственная цель*** псевдоунитарного преобразования состоит в топорном уничтожении одного лишь множителя $\eta\cdot\left(1+\frac{V_0}{\varsigma}\cdot\widehat{\alpha}_x\right)$ (возникшего ***после*** необходимого лоренц-преобразования ***дифференцирующих*** операторов) при ***обязательном условии не затрагивать очередным преобразованием никаких других операторов.***

Читателю следует обратить внимание на два чрезвычайно важных обстоятельства.

1. Оказывается, что в рамках традиционного метода проверки уравнения Дирака на лоренц-инвариантность, преобразование уравнения, первоначально отнесенного к j-й системе отсчета, может быть выполнено ***только в два*** этапа, причем псевдоунитарное преобразование должно быть выполнено ***только после*** лоренцевого. Кроме того, второе преобразование уже не затрагивает ***ни одного*** из операторов.

2. Фактически ***постулируется*** (то есть никак не обосновывается), что второе преобразование должно иметь вид

$$\widehat{\mathrm{U}}\left\{\left(i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}-\varsigma\cdot\widehat{\alpha}_x\widehat{P}_{k,x}\right)\left[\eta\cdot\left(1+\frac{V_0}{\varsigma}\cdot\widehat{\alpha}_x\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\varsigma\cdot\left(\widehat{\alpha}_y\widehat{P}_{k,y}+\widehat{\alpha}_z\widehat{P}_{k,z}+m_0\cdot\varsigma\cdot\widehat{\beta}\right)\right\}\widehat{\mathrm{U}}=$$

$$=\left\{i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}-\varsigma\cdot\left(\widehat{\alpha}_x\widehat{P}_{k,x}+\widehat{\alpha}_y\widehat{P}_{k,y}+\widehat{\alpha}_z\widehat{P}_{k,z}+m_0\cdot\varsigma\cdot\widehat{\beta}\right)\right\},$$

где $\widehat{\mathrm{U}}$ — такой оператор, что

$$\widehat{\mathrm{U}}\left[\eta\cdot\left(1+\frac{V_0}{\varsigma}\cdot\widehat{\alpha}_x\right)\right]\widehat{\mathrm{U}}=1\quad(\widehat{\mathrm{U}}\widehat{\alpha}_x=\widehat{\alpha}_x\widehat{\mathrm{U}};\quad \widehat{\mathrm{U}}\widehat{\alpha}_x\widehat{\mathrm{U}}\neq\widehat{\alpha}_x);\qquad (87,\text{а})$$

$$\widehat{\mathrm{U}}\widehat{\alpha}_y\widehat{\mathrm{U}}=\widehat{\alpha}_y;\quad \widehat{\mathrm{U}}\widehat{\alpha}_z\widehat{\mathrm{U}}=\widehat{\alpha}_z;\quad \widehat{\mathrm{U}}\widehat{\beta}\widehat{\mathrm{U}}=\widehat{\beta}.\qquad (87,\text{б, в, г})$$

Мне кажется, что пора назвать вещи своими именами: ***проверка*** уравнения Дирака лоренц-инвариантность не состоялась. Тому, кто с этим не согласен, нужно будет: во-первых, объяснить, почему преобразование уравнения необходимо выполнять обязательно в два этапа, причем начиная только с дифференцирующих операторов; во-вторых, ответить на вопрос, должны ли (и если — да, то на каком основании)

(подлежащий преобразованию), $\widehat{\widetilde{\mathrm{U}}}$ — оператор, возникший в результате преобразования, а заведомо известные операторы $\widehat{\mathrm{U}}$ и $\widehat{\Pi}$ удовлетворяют условию $\widehat{\mathrm{U}}\widehat{\Pi}=1$. Видно, что подлинное унитарное преобразование отличается от преобразования (85), хотя некоторое внешнее сходство имеется.

формулы преобразования (87) считаться принадлежащими именно лоренцевой группе[16].

Причина несостоятельности традиционного способа проверки уравнения Дирака на лоренц-инвариантность лежит на поверхности: она обусловлена нежеланием даже задуматься, а не стоят ли за операторами $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ физические характеристики. В противном случае нашлись бы формулы преобразования этих операторов[17], причем — принадлежащие именно лоренцевой группе.

В заключение я продемонстрирую, как можно легко установить явный вид оператора $\widehat{\text{U}}$.

Пусть, например,

$$\widehat{\text{U}} = a - b \cdot \widehat{\alpha}_x. \tag{88, а}$$

Тогда, используя любое из равенств (87, б, в, г) и вспоминая, что $\widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_y + \widehat{\alpha}_y\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha}_x\widehat{\alpha}_z + \widehat{\alpha}_z\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha}_x\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_x = 0$, $\widehat{\alpha}_x^2 = 1$, получаем:

$$a^2 - b^2 = 1. \tag{88, б}$$

Введя обозначение $a + b \cdot \widehat{\alpha}_x \equiv \widehat{\text{n}}$ и используя равенство (87, а), находим, что $\eta \cdot \widehat{\text{n}}\widehat{\text{U}}\left(1 + \frac{V_0}{c} \cdot \widehat{\alpha}_x\right)\widehat{\text{U}} = \widehat{\text{n}}$. Это соотношение (поскольку $\widehat{\text{n}}\widehat{\text{U}} = 1$) приобретает вид:

$$\eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{c} \cdot \widehat{\alpha}_x\right)(a - b \cdot \widehat{\alpha}_x) = (a + b \cdot \widehat{\alpha}_x).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}. \tag{88, в}$$

Теперь в нашем распоряжении два уравнения (88, б, в) с двумя неизвестными a и b. Решив эти уравнения, находим, что

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta + 1)}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta - 1)}.$$

Таким образом:

$$\widehat{\text{U}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta + 1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(\eta - 1)} \cdot \widehat{\alpha}_x, \quad \widehat{\text{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(\eta - 1)} \cdot \widehat{\alpha}_x.$$

---

[16] На всякий случай еще раз напомню, что логически абсолютно бессодержательно само понятие ***лоренцевой*** группы формул, если речь идет о преобразованиях ***абстрактных*** — математических — величин (попросту говоря — символов).

[17] Напомню, что, согласно принципу соответствия, формулы преобразования операторов физических величин должны быть идентичны формулам преобразования самих величин.

6.4. Вывод уравнения Дирака

Давайте сопоставим следующие очевидные факты.

1. Уравнение Дирака, на самом деле, не только оказалось лоренц-инвариантным, но еще и многократно подтвержденным самыми разнообразными экспериментами. Оно выдержало суровую проверку временем, и всякие сомнения в его истинности, если они и возникали, то давным-давно отпали.

2. Согласно одному из фундаментальных постулатов квантовой механики — принципу соответствия, — уравнение Дирака, как и любое уравнение, в котором операторы представляют физические характеристики, ***должно*** быть выведено из соотношения (доквантового) между этими же характеристиками путем простой замены их операторами.

3. Если считать, что величина **с**, фигурирующая в соотношении Эйнштейна $E = \sqrt{\varsigma^2\vec{P}^2 + \varsigma^2 \cdot (m_0 \cdot \varsigma)^2}$, есть не что иное, как скорость света — универсальная константа, — вывести уравнение Дирака, опираясь на принцип соответствия, невозможно.

Вывод из сопоставления перечисленных фактов очевиден: что-то не так в соотношении Эйнштейна. Но..., ведь оно также лоренц-инвариантно и также выдержало проверку временем. Однако, надеюсь, я смог убедить читателя в том, что величина **с** — никакая не скорость света, а величина $m_0 \cdot \varsigma^2$ — никакая не энергия покоя. В таком случае остается признать, что традиционная ***форма*** соотношения Эйнштейна ошибочна. Символ **с** имеет право выступать лишь в качестве ***обозначения числа*** $3 \cdot 10^{10}$ с размерностью см/с. Гораздо удобнее всякий раз писать **с** вместо $3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Я предлагаю принять нижеследующую форму соотношения Эйнштейна:

$$E = \sqrt{\left(\vec{u} \cdot \vec{P}\right)^2 + m_0 \cdot \left(\vec{u} \cdot \vec{u}_0\right)^2}, \tag{89}$$

где $\vec{u}_0$ — собственно-орбитальная скорость частицы, $\vec{u}$ — ее результирующая скорость, причем:

$$u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = \varsigma^2; \quad \left(\vec{u} \cdot \vec{u}_0\right)^2 = \mathrm{c}^4 \text{ [18]}. \tag{90, а, б}$$

[18] В своей книге «Логическая структура частной теории относительности» (изд-во УРСС, М., 2001) я обосновал соотношение между полной кинетической энергией точечной частицы, ее массой покоя и импульсом ее центра инерции в виде

$$E = \sqrt{\langle(\vec{u} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0})^2\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \langle(\vec{u} \cdot \langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0})^2\rangle_{\Delta t}},$$

где Δt и Δt_0 — промежутки времени усреднения величин, причем $\Delta t \gg \Delta t_0 \geqslant 10^{-20}$ с. Оказалось, что если только не иметь в виду крайне экзотические ситуации, то

(Замечу, что именно равенства (90, а, б) отражают те особенности движения свободной точечной частицы, о которых говорилось в предыдущих главах.)

Теперь, заменив, согласно принципу соответствия, величины их операторами, приходим к уравнению состояния в символической форме

$$\widehat{E}\Psi = \sqrt{\left(\widehat{\vec{u}}\widehat{\vec{P}}\right)^2 + m_0 \cdot \left(\widehat{\vec{u}\vec{u}_0}\right)^2}\,\Psi, \tag{91, а}$$

причем, согласно все тому же принципу,

$$\left(\widehat{\vec{u}}\right)^2 = 3\varsigma^2; \quad \left(\widehat{u_x}\right)^2 = \left(\widehat{\vec{u}}_y\right)^2 = \left(\widehat{\vec{u}}_z\right)^2 = \varsigma^2; \quad \left(\widehat{\vec{u}\vec{u}_0}\right)^2 = \varsigma^4. \tag{92, а, б, в}$$

Очередная задача — извлечь квадратный корень. Однако, я надеюсь, читатель помнит, что с точки зрения математики в этом нет никакой проблемы. Достаточно постулировать необходимы соотношения между операторами, и дело будет сделано.

Введя новые обозначения

$$\widehat{\vec{u}}_x = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_x; \quad \widehat{\vec{u}}_y = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_y; \quad \widehat{\vec{u}}_z = \varsigma \cdot \widehat{\alpha}_z; \quad \widehat{u}\widehat{u}_0 = \varsigma^2 \cdot \widehat{\beta}$$

и постулировав соотношения

$$\widehat{\alpha_x}\,\widehat{\alpha}_y + \widehat{\alpha_y}\,\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha_y}\,\widehat{\alpha}_z + \widehat{\alpha_z}\,\widehat{\alpha}_y = \widehat{\alpha_z}\,\widehat{\alpha}_x + \widehat{\alpha_x}\,\widehat{\alpha}_z = 0; \tag{93, а}$$

$$\widehat{\alpha}_x\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_x = \widehat{\alpha}_y\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_y = \widehat{\alpha}_z\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}_z = 0; \tag{93, б}$$

$$\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} - \widehat{\vec{P}}\widehat{\vec{\alpha}} = \widehat{\beta}\widehat{\vec{P}} - \widehat{\vec{P}}\widehat{\beta} = 0\ ^{19)}, \tag{93, в}$$

мы получаем возможность извлечь квадратный корень и прийти к уравнению в виде

$$\widehat{E}\Psi = \varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0 \cdot \varsigma \cdot \widehat{\beta}\right)\Psi. \tag{91, б}$$

Далее, выбрав пространственно-временное представление операторов $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$, приходим к традиционной форме уравнения Дирака:

$$\left\{i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \varsigma \cdot \left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + (m_0 \cdot \varsigma) \cdot \widehat{\beta}\right)\right\}\Psi = 0, \tag{94}$$

после чего нужно обратить внимание на то, что возникли проблемы. Ведь все принятые соотношения необходимо обосновать с ***физической*** точки зрения. В состоянии ли мы это сделать?

$$\langle(\vec{u} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0})^2\rangle_{\Delta t} = \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2, \quad \langle(\vec{u} \cdot \langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0})^2\rangle_{\Delta t} = \varsigma^4.$$

Чтобы не отвлекать внимания читателя, сейчас я представил упрощенное выражение (89) для энергии E.

[19] Это те же самые соотношения (78), которые постулировал Дирак и о которых шла речь в § 6.2.

Начнем с соотношений (93, в).

Коммутация операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\vec{P}}$ означает, что они действуют на разные аргументы Ψ-функции (это же относится к операторам $\widehat{\beta}$ и $\widehat{\vec{P}}$). Следовательно, соотношение (93, в) можно обосновать, только предположив, что частица в ***один и тот же*** момент времени t присутствует в двух пространственно разделенных точках (координаты одной из них и есть те, что обозначены символами x, y, z), причем присутствие в одной точке совершенно не зависит от присутствия в другой. Конечно, с традиционной точки зрения, такое не лезет ни в какие ворота, но читатель, надеюсь, догадался, что x, y, z — это координаты не самой частицы, а ее центра инерции[20].

Что касается соотношений (93, а, б), то ведь это соотношения между ***операторами*** проекций скоростей. Если бы мы располагали соотношениями между проекциями непосредственно самих скоростей, можно было бы опереться на принцип соответствия[21]. Но..., давайте временно останемся с нерешенной проблемой обоснования соотношений (93, а, б).

Итак, в нашем распоряжении оказалось уравнение (94), которое, как советовал Дирак, нужно немедленно проверить на лоренц-инвариантность. С этой целью представим полный оператор в виде

$$\{\widehat{\mathrm{J}}\} \equiv \left\{ i\cdot\hbar\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) - \varsigma\cdot\left(\widehat{\alpha}_{j,x}\widehat{P}_{j,x} + \widehat{\alpha}_{j,y}\widehat{P}_{j,y} + \widehat{\alpha}_{j,z}\widehat{P}_{j,z} + (m_0\cdot\varsigma)\cdot\widehat{\beta}_j\right)\right\}, \tag{95}$$

предполагая перенести его из j-й системы отсчета в k-ю.

Для проверки необходимо ***заранее*** располагать формулами преобразования всех j-операторов, а, поскольку $\widehat{\vec{\alpha}}$- и $\widehat{\beta}$-операторы не являются абстрактными величинами, формулы их преобразования также должны принадлежать лоренцевой группе. И вот здесь опять возникает проблема, аналогичная той, с которой мы пока не справились.

Величины α_x, α_y, α_z — это ведь обезразмеренные проекции результирующей скорости частицы, участвующей в двух независимых движениях; величина β — это скалярное произведение скоростей результирующей и собственно-орбитальной. А формул преобразования

---

[20] Законный вопрос — как могли не заметит корифеи теоретической физики, что введение соотношений (93, в) означает признание существования частицы ***одновременно и независимо*** в двух пространственно разделенных точках пространства? Ответ очевиден. Если относиться к операторам $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$ как к чисто математическими величинам, не представляющим физические характеристики, то подобный вопрос и не возникает.

[21] Эти соотношения выведены в книге «Логическая структура частной теории относительности» (изд-во УРСС, М., 2001).

проекций ***этих*** скоростей до сих пор не существовало и по вполне прозаической причине. Ни Лоренц, ни Эйнштейн, ни Пуанкаре не поверили бы, что частица вообще не может существовать, не вращаясь (даже пребывая в пустоте, где ей не к чему притягиваться).

В создавшейся ситуации ничего другого не остается, как рискнуть включить в лоренцеву группу нижеследующие формулы преобразования[22]:

$$u_{j,x} = u_{k,x} = u_x; \tag{96, а}$$

$$u_{j,y} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) \cdot u_{k,y}; \quad u_{j,y}^2 = u_{k,y}^2 = \varsigma^2; \tag{96, б, в}$$

$$u_{j,z} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) \cdot u_{k,z}; \quad u_{j,z}^2 = u_{k,z}^2 = \varsigma^2; \tag{96, г, д}$$

$$u_{0,j,x} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) \cdot u_{0,k,x}; \quad u_{0,j,x}^2 = u_{0,k,x}^2 = \varsigma^2; \tag{97, а, б}$$

$$u_{0,j,y} = u_{0,k,y}; \tag{97, в}$$

$$u_{0,j,z} = u_{0,k,z}. \tag{97, г}$$

Вот уже из этих формул следует, что:

$$u_x \cdot u_{0,j,x} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) u_x \cdot u_{0,k,x}; \tag{98, а}$$

$$u_{j,y} \cdot u_{0,j,y} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) u_{k,y} \cdot u_{0,k,y}; \tag{98, б}$$

$$u_{j,z} \cdot u_{0,j,z} = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) u_{k,z} \cdot u_{0,k,z}. \tag{98, в}$$

Таким образом:

$$\left(\vec{u}_j \cdot \vec{u}_{0,j}\right) = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot u_x\right) \cdot \left(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_{0,k}\right), \tag{99, а}$$

---

[22] Что касается обоснованности включения этих формул в лоренцеву группу, то об этом подробно говорится в книге «Логическая структура частной теории относительности» (изд-во УРСС, М., 2001). Сейчас я только поясню, почему нельзя использовать уже известные формулы преобразования проекций скорости. Дело в том, что формулы эти относятся к скорости центра инерции частицы $\vec{V}$, а $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \leqslant \varsigma^2$. Именно таково условие применимости уже известных формул преобразования. Однако абсолютное значение результирующей скорости $\vec{u}$ равно $3\varsigma^2$, причем $u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = \varsigma^2$ (проблемы возникают и с собственно-орбитальной скоростью $\vec{u}_0$). Кроме того, согласно одному из постулатов частной теории относительности, если хотя бы один инерциальный наблюдатель установит, что абсолютное значение какой-нибудь проекции скорости равно ς, то любой другой инерциальный наблюдатель должен установить то же самое.

причем, согласно соотношению (90, в),

$$\left(\vec{u}_j \cdot \vec{u}_{0,j}\right)^2 = \left(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_{0,k}\right)^2 = \varsigma^4. \tag{99, б}$$

В дальнейшем целесообразно принять обозначения

$$\left(\vec{u}_j \cdot \vec{u}_{0,j}\right) \equiv \varsigma^2 \cdot \beta_j; \quad \left(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_{0,k}\right) \equiv \varsigma^2 \cdot \beta_k; \quad \frac{V_0}{\varsigma^2} \equiv \nu_0. \tag{100, а, б, в}$$

Из формул (90, б) и (96, б) следует, что должно иметь место равенство

$$u_{j,y}^2 = \begin{cases} \varsigma^2; \\ \eta^2 \cdot (1+\nu_0 \cdot u_x) \cdot u_{k,y} \cdot (1+\nu_0 \cdot u_x) \cdot u_{k,y} = \\ = \eta^2 \cdot \left\{\nu_0 \cdot \left(u_x \cdot u_{k,y}^2 + u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) + \left(u_{k,y}^2 + \nu_0^2 \cdot u_x \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right)\right\} = \\ = \eta^2 \cdot \left\{\nu_0 \cdot \left(u_x \cdot \varsigma^2 + u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) + \left(\varsigma^2 + \nu_0^2 \cdot u_x \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right)\right\}, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\varsigma^2 = \eta^2 \cdot \left\{\nu_0 \cdot \left(u_x \cdot \varsigma^2 + u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) + \left(\varsigma^2 + \nu_0^2 \cdot u_x \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right)\right\}.$$

Но равенство это может иметь место ***только при условии, что***

$$u_x \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y} = -\varsigma^4 \tag{101, а}$$

или, что — то же самое,

$$u_x \cdot u_{k,y} = -u_x \cdot u_{k,y} \text{ [23]}. \tag{101, б}$$

Тогда (поскольку $u_x^2 = \varsigma^2$):

$$\left(u_x \cdot \varsigma^2 + u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) = \frac{1}{\varsigma^2} \cdot \left(u_x \cdot \varsigma^4 + u_x^2 \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) = $$
$$= \frac{1}{\varsigma^2} \cdot u_x \cdot \left(\varsigma^4 + u_x \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) = 0;$$

$$\left(\varsigma^2 + \nu_0^2 \cdot u_x \cdot u_{k,y} \cdot u_x \cdot u_{k,y}\right) = \frac{\varsigma^2}{\eta^2}.$$

Чтобы не утомлять читателя хотя и простыми, но громоздкими алгебраическими выкладками, я отмечу, что, приняв формулы преобразования в виде (96, 97) и условия (90), мы ***вынуждены*** принять нижеследующие соотношения между проекциями результирующей скорости

[23] Происхождение этого, казалось бы, поразительного равенства описано все в той же книге «Логическая структура частной теории относительности».

частицы:

$$u_x \cdot u_y = -u_y \cdot u_x; \quad u_y \cdot u_z = -u_z \cdot u_y; \quad u_z \cdot u_x = -u_x \cdot u_z, \qquad (102,\text{а, б, в})$$

и, кроме того, соотношения

$$u_x \cdot \beta = -\beta \cdot u_x; \quad u_y \cdot \beta = -\beta \cdot u_y; \quad u_z \cdot \beta = -\beta \cdot u_z. \qquad (102,\text{г, д, е})$$

Введя обозначения

$$u_x = \varsigma \cdot \alpha_x, \quad u_y = \varsigma \cdot \alpha_y, \quad u_z = \varsigma \cdot \alpha_z$$

и заменив, согласно принципу соответствия, в соотношениях (102) величины их операторами, придем к тем самым соотношениям (93), которые пришлось ***постулировать*** ради извлечения квадратного корня. Вспомним, что на том этапе их было невозможно обосновать. Теперь очевидно, что они, образно выражаясь, вытекают из принадлежности формул преобразования проекций результирующей и собственно-орбитальной скоростей частицы именно лоренцевой группе. Подчеркну — ***вывести формулы преобразования, исходя из соотношений (93) в принципе невозможно.***

В заключение приведу формулы преобразования операторов $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$:

$$\widehat{\alpha}_{j,x} = \widehat{\alpha}_{k,x} = \widehat{\alpha}_x; \quad (\widehat{\alpha}_x)^2 = 1; \qquad (103,\text{а, б})$$

$$\widehat{\alpha}_{j,y} = \eta \cdot (1 + \nu_0 \cdot \widehat{\alpha}_x)\, \widehat{\alpha}_{k,y}; \quad \left(\widehat{\alpha}_{j,y}\right)^2 = \left(\widehat{\alpha}_{k,y}\right)^2 = 1; \qquad (103,\text{в, г})$$

$$\widehat{\alpha}_{j,z} = \eta \cdot (1 + \nu_0 \cdot \widehat{\alpha}_x)\, \widehat{\alpha}_{k,y}; \quad \left(\widehat{\alpha}_{j,z}\right)^2 = \left(\widehat{\alpha}_{k,z}\right)^2 = 1. \qquad (103,\text{д, е})$$

Теперь можно проверить уравнение Дирака (82, а) на лоренц-инвариантность, выразив ***все*** j-операторы через k-операторы. В результате уравнение (82, а) преобразуется к виду

$$\eta \cdot (1 + \nu_0 \cdot \widehat{\alpha}_x) \left\{ i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) - \right.$$
$$\left. - \varsigma \cdot \left(\widehat{\alpha}_{k,x} \widehat{P}_{k,x} + \widehat{\alpha}_{k,y} \widehat{P}_{k,y} + \widehat{\alpha}_{k,z} \widehat{P}_{k,z} + (m_0 \cdot \varsigma) \cdot \widehat{\beta}_k \right) \right\} \Psi = 0.$$

Поскольку $\eta \cdot (1 + \nu_0 \cdot \widehat{\alpha_x})\, \Psi \neq 0$, значит

$$\left\{ i \cdot \hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) - \varsigma \cdot \left(\widehat{\alpha}_{k,x} \widehat{P}_{k,x} + \widehat{\alpha}_{k,y} \widehat{P}_{k,y} + \widehat{\alpha}_{k,z} \widehat{P}_{k,z} + (m_0 \cdot \varsigma) \cdot \widehat{\beta}_k \right) \right\} \Psi = 0.$$

Вид этого уравнения — в k-й системе отсчета — идентичен виду уравнения в j-й системе.

На этом можно закончить повествование о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака. А читателю стоит еще раз прочесть эпиграфы к гл. 1 и 5 этой книги.

В книге рассматривается новая — физически содержательная — интерпретация знаменитого соотношения Эйнштейна, связывающего полную энергию свободной точечной частицы с ее массой покоя и ее импульсом.

Доказывается, что спин (собственный механический момент) точечной частицы любой разновидности обусловлен ее вращением по орбите конечного радиуса с орбитальной скоростью, абсолютное значение которой в $\sqrt{3}$ раз превышает скорость света. Показано, что именно это следует из квантово-механического релятивистского уравнения Дирака; показано, что то же самое следует и из доквантового релятивистского соотношения Эйнштейна.

Доказывается, что уравнение Дирака (описывающее состояние свободной точечной частицы), вопреки традиционным представлениям, совершенно строго выводится из соотношения Эйнштейна с помощью одного из основных постулатов квантовой механики — принципа соответствия.